

Ein Beitrag zur Ultraschallbildwandlung auf thermischem Wege.

VON HERBERT TIELSCH und ALFRED BOCEK.

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 29. Oktober 1954.)

Einleitung.

Die verschiedenen Verfahren der akustisch-optischen Bildwandlung lassen sich in folgende Gruppen einteilen:

1. Verfahren, die die mechanische Wirkung des Ultraschalls, wie Schallgleichdruck oder -strömung ausnutzen [1, 2, 16, 22, 23, 24].

2. Verfahren, die auf der chemischen Wirkung des Ultraschalls beruhen [1, 4, 6, 7, 10, 18, 27].

3. Verfahren, die thermisch arbeiten.

Die Verfahren der ersten beiden Gruppen sind weitgehendst entwickelt. Es gibt darüber eine umfangreiche Literatur. Die Verfahren der letzten Gruppe dagegen ließen sich noch wesentlich verbessern.

In den Arbeiten über die Ausnutzung thermisch-optischer Effekte bei der Ultraschallbildwandlung werden Phosphore bevorzugt verwendet [3, 5, 7, 15, 21]. Jedoch benutzen ERNST und HOFFMANN [7] bereits mit Erfolg Wärmefarben. Wegen ihrer bequemen Handhabung sind diese bei quantitativen Untersuchungen den Phosphoren vorzuziehen. In dem ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die verschiedenen Typen von Wärmefarben auf ihre Brauchbarkeit bei der Ultraschallbildwandlung geprüft. Im zweiten Teil wird das Schirmmaterial als der eigentliche akustisch-thermische Wandler näher untersucht. Es wird über einen entwickelten Schirm berichtet, der nahezu restlos die auffallende Schallenergie in Wärme überführt und der als das noch fehlende Glied bei der akustisch-thermisch-optischen Bildwandlung angesehen werden kann. In den bisher vorliegenden Arbeiten wurde dieser kaum beachtet. Auf eine restlose Überführung von Schallenergie in Wärme wurde wenig Wert gelegt.

I. Wärmefarben.

Die große Anzahl von Wärmefarben läßt sich in folgende Gruppen einteilen:

A. Thermotrope Substanzen.

1. irreversibel arbeitende Thermocolore.
2. reversibel arbeitende Thermoskope.

B. Phototrope Substanzen.

Die thermotropen Substanzen erfahren eine Farbvertiefung bei Erwärmung. Die phototropen in Form kristallisierter Verbindungen erleiden eine ähnliche Farbänderung bei Absorption von kurzwelligem Licht. Letztere nehmen die ursprüngliche Farbe im Dunkeln bei Zimmertemperatur nach mehreren Stunden oder beim Erwärmen in wenigen Sekunden wieder an. Es kann durchaus vorkommen, daß Substanzen sowohl thermo- als auch phototrop sind. Die geeignetsten Wärmefarben wurden auf ihre Brauchbarkeit geprüft.

1. Thermocolore.

Bei unseren Versuchen mit thermotropen Substanzen benutzten wir zunächst die von der IG Farben

AG entwickelten Thermocolore. Die Ergebnisse waren zufriedenstellend. Etwas störend machte sich allerdings die Abhängigkeit des Farbumschlagspunktes von der Dauer der Wärmeeinwirkung bemerkbar [9]. Bei langer, aber schwächerer Erwärmung liegt der Umschlagspunkt bei einer tieferen Temperatur als bei kurzer stärkerer.

2. Thermoskope.

Da uns die Thermoskope [12, 14] wegen ihres reversiblen Verhaltens geeigneter erschienen, wurden die üblichsten auf ihre Brauchbarkeit geprüft. Eine Übersicht über die von uns dargestellten und untersuchten Thermoskope gibt die Tabelle.

Tabelle.

Nr.	Substanz	Umschlagstemperatur	Farbe
I	$\text{Ag}_2[\text{HgJ}_4]$	35—45°	gelb-orange-rot
II	$\text{Cu}_2[\text{HgJ}_4]$	71°	rot-schwarz
III	$\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$	ca. 30°	rosa-blau
IV	$\text{FeJ}_2 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$	50°	hellgrün-schwarz
V	TiJ_2	168°	gelb-rot
VI	HgJ_2	126°	rot-gelb
VII	α, δ -Diphenylfulgid	80—160°	zitronengelb-braun
VIII	α, δ -Dianysilfulgid	70—115°	chromgelb-dunkelbraun

Von den angeführten Verbindungen mußten Nr. V und VI wegen zu trägen Farbumschlages ausscheiden.

Für Nr. IV konnte kein geeignetes Schirmträgermaterial gefunden werden. Bei Berührung der wäßrigen Lösung dieser Verbindung mit Papier oder Leinen färbten sich diese sofort schwarz. Es wurde von einer weiteren Verwendung dieser Substanz abgesehen. Die Verbindung wäre aber wegen ihres sehr kontrastreichen Farbumschlages in einer Rasteranordnung bei Verwendung geeigneter Absorber für spezielle Zwecke durchaus zu gebrauchen.

Nr. III, Kobalt-II-Chlorid, kann als brauchbare Substanz für solche Fälle bezeichnet werden, bei denen es auf eine steile Gradationskurve ankommt. Da der Farbumschlag bei dieser Verbindung auf einer Abgabe von Kristallwasser beruht, muß dafür gesorgt werden, daß, wenn der Umschlag reversibel sein soll, das abgespaltene Wasser nicht aus der Substanzeinbettung nach außen dringen und somit verloren gehen kann. Zu diesem Zweck wurde wie folgt verfahren: Die feinpulverisierte Substanz wurde trocken oder in einem farblosen Lack dispergiert auf dem Schirmträger verrieben. Danach wurde durch mehrfaches Tauchen die Lackschicht verstärkt, wobei nach jeder Tauchung der Schirm bei Zimmertemperatur getrocknet wurde.

Locke, die sich für diesen Zweck recht gut eignen, sind Trolitul in Benzol oder Xylol gelöst, sowie Cellulosetriacetat in Methylenchlorid. Bei Beschallung mit kleinen Intensitäten, bei denen die in der Schicht auf-

tretenden Temperaturen kleiner als 40–50° waren, blieb der Schirm trotz einer gewissen Trägheit reversibel.

Bei einer quantitativen Auswertung des erzielten Bildes zur Ermittlung der Intensitätsverteilung eines Schallfeldes ist zu beachten, daß bei allen Farben, deren Farbumschlag auf Abspaltung von Hydratwasser beruht, es trotz mehrfacher Lackierung nicht erreicht werden konnte, daß die Umschlagtemperatur von der Dauer der Wärmeeinwirkung unabhängig wurde. Denn durch die nie vollständig vermeidbaren Poren der isolierenden Lackschicht hindurch verdunstet immer etwas Wasser, so daß das Gleichgewicht zwischen abgespaltenem und komplex gebundenem Wasser zugunsten des ersteren verschoben wird. Bei niedriger Temperatur kann schließlich in entsprechend längerer Zeit die komplex gebundene Wassermenge genau so klein wie bei höherer Temperatur werden.

Um $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ auch bei höheren Schallintensitäten verwenden zu können, wurde die konzentrierte wäßrige Lösung an frisch hergestelltem, körnigem, niedermolekularem Harnstoffharz (Harnstoff + Formaldehyd) oder Kieselgel adsorbiert. Es ergab sich jedoch keine Verbesserung. Der Schirm wurde zwar widerstandsfähiger und besser reversibel, aber weniger empfindlich wegen der größeren Reflexion des Schalles an der Grenzfläche. Bei Verwendung von Kieselgel erfolgte zusätzlich eine Verschiebung des Farbumschlagpunktes nach höheren Temperaturen hin. Zudem wurde in beiden Fällen der Kontrast zwischen Ausgangs- und Umschlagsfarbe geringer.

Die Verbindungen I und II erwiesen sich als die brauchbarsten. $\text{Cu}_2[\text{HgJ}_4]$ wurde aus der Lösung von $\text{K}_2[\text{HgJ}_4]$ durch Fällern mit CuSO_4 gewonnen [11, 17]. Es ist ein leuchtend rotes Pulver, welches beim Erwärmen die Farbe in einer sehr steilen Gradationskurve über dunkelrot, purpur, schokoladenbraun nach schwarz hin ändert. Die analog gebaute Silberverbindung wurde auf gleichem Wege teils durch Fällern mit Silbernitrat und teils durch Verreiben der Komponenten AgJ und HgJ_2 nach Befeuchten mit Alkohol hergestellt. Im zweiten Fall färbt sich die Mischung, die zuerst rot-orange aussieht, nach Abschluß der Reaktion bei Zimmertemperatur gelb. Diese kanariengelbe Verbindung ist bei 35° orange, bei 45° rot und geht bei steigender Temperatur in dunkelrot über. Bei Abkühlung wird die ursprüngliche Farbe nicht sofort wieder angenommen. Wird $\text{Ag}_2[\text{HgJ}_4]$ längere Zeit bis zu dunkelroter Färbung erhitzt, was einer Temperatur von etwa 110° entspricht, so bleibt die Substanz nach Abkühlung für längere Zeit orange.

ERNST und HOFFMANN [7] haben schon darauf hingewiesen, daß Silber-Quecksilberjodid sich zur akustisch-thermisch-optischen Bildwandlung eignet. Bei unseren ersten Versuchen mit diesen Substanzen störte die speziell bei $\text{Cu}_2[\text{HgJ}_4]$ steile Gradationskurve, so daß die oben angegebenen Farbübergänge kaum unterschieden werden konnten. Dies liegt z. T. an der bereits recht dunklen Ausgangsfarbe.

Um den Umschlagsbereich etwas zu erweitern, wurden Mischungen der beiden Substanzen in verschiedenen Verhältnissen hergestellt. Sie erwiesen sich im Gewichtsverhältnis 1 : 12 bis 1 : 14 für $\text{Cu}_2[\text{HgJ}_4] : \text{Ag}_2[\text{HgJ}_4]$ als brauchbar. Die Grundfarbe in der Mischung 1 : 12 ist ein helles Orange, die dunkelste Umschlagsfarbe schwarz. Das helle Orange ließ sich außerdem noch

durch teilweises bzw. vollständiges Ersetzen des AgJ durch AgCl nach helleren Farbtönen hin verschieben. Aus vollständigem Ersetzen des AgJ durch AgCl resultiert 2 AgCl , HgJ_2 , ein zitronengelbes Pulver mit ähnlichen Eigenschaften wie $\text{Ag}_2[\text{HgJ}_4]$. Es tritt beim Erhitzen eine gleiche Farbfolge auf. Wird 2 AgCl , HgJ_2 nach Eintreten des Farbumschlages weiter erhitzt, so wird nach Erkalten die ursprüngliche Farbe auch nicht sofort wieder angenommen, sondern die Substanz bleibt für einige Stunden gelb-orange [8]. Beide Silberverbindungen färben sich im Tageslicht dunkel. Es ist zu vermuten, daß die Dunkel-färbung auf Bildung von metallischem Silber beruht, da die Kupferverbindung dieses Verhalten nicht zeigt.

Bei allen Versuchen ist es gleichgültig, ob die Wärme direkt zugeführt wird oder durch Beschallung entsteht. Es zeigten sich jedesmal die gleichen Effekte.

Die Funktion Farbe-Temperatur durchläuft bei den beiden Doppeljodiden eine Hysteresisschleife. Diese reicht bei $\text{Cu}_2[\text{HgJ}_4]$ von 53°, orange bis 71°, schokoladenbraun mit einer Koerzitivtemperatur von 6,2° bei dunkelpurpur und bei $\text{Ag}_2[\text{HgJ}_4]$ von 25°, gelb bis 45°, rot mit einer Koerzitivtemperatur von 5,5° bei rotorange.

Da solch ein Hysteresiseffekt eine quantitative Auswertung sehr erschwert, wurde das α , δ -Diphenylfulgid und das α , δ -Dianysilfulgid hergestellt und jedes auf seine Brauchbarkeit als Wärmefarbe untersucht. Beide Substanzen sind neben anderen Fulgiden von STOBBE [25] eingehendst beschrieben. Danach soll bei ihnen kein Hysteresiseffekt auftreten.

Durch Mischen verschiedener Fulgide in bestimmten Verhältnissen kann der Temperatur-Farbe-Kurve eine vorgeschriebene Form gegeben werden, so daß eine zweckmäßige Gradation die quantitative Auswertung erzielter Bilder des Schallfeldes sehr erleichtern würde. Dieses Verfahren wäre dem auslöschbarer Lichtbilder ähnlich, wie es von der Zeiß-Ikon AG entwickelt wurde [28].

3. Phototrope Substanzen.

Die genannten Fulgide besitzen neben ihrer Eigenschaft als Thermoskope auch phototropen Charakter, der außerdem noch bei einer Reihe von anderen Stoffen auftritt. STOBBE [25] beschreibt neben den Fulgiden noch die Hydrazone, Osazone, Anile und einige Derivate des Stilbens als besonders phototrop.

Das α , δ -Diphenylfulgid wurde durch Erwärmen und Beschallen ausprobiert. Es ist bei Zimmertemperatur zitronengelb und wird im Bereich von 80 bis 160° braun. Als phototrope Substanz vertieft sich die zitronengelbe Farbe beim Erregen mit kurzwelligem Licht nach orange hin. Beim Erwärmen oder Beschallen wird die ursprüngliche Farbe wieder angenommen. Das α , δ -Dianysilfulgid wurde nur durch Erwärmen erprobt. Es ist chromgelb und wird im Bereich von 70 bis 115°C dunkelbraun. Als phototrope Substanz verhält es sich ähnlich wie die erste. Bei beiden Fulgiden liegt das phototrope und das thermotrope Gebiet so weit auseinander, daß die in beiden Gebieten stattfindenden Farbänderungen sich nicht gegenseitig stören. Unterhalb von etwa 70° C findet durch Erwärmen eine Löschung der durch Licht angeregten Verbindung statt, während oberhalb von 70° der nicht angeregte Stoff seine Farbe vertieft.

Die genannten Fulgide sind vor allem als Thermoskope brauchbar, da die phototropen Eigenschaften für Bildwandlerzwecke zu schwach ausgeprägt sind. Für diesen Zweck wären das α, δ, δ' -Triphenylfulgid und das α Methyl- α phenyl δ - (α -nitrophenyl)-fulgid [28] zu empfehlen. Die Farben des ersteren sind orangegelb-schwarzbraun und des letzteren gelb-blaugrau.

Auch andere phototrope Substanzen, die nicht zu den oben aufgeführten Klassen gehören, erwiesen sich als brauchbar. So wurde ein Schirm mit β -Tetrachlor- α -ketonaphthalin [13, 29] hergestellt. Dieser war im Normalfall farblos, verfärbte sich bei Belichtung rotviolett und wurde bei Erwärmung bzw. Beschallung wieder farblos.

II. Der Bildwandler-schirm.

Während bis jetzt der thermisch-optische Teil des Bildwandlers besprochen wurde, soll im folgenden der akustisch-thermische Teil untersucht werden. Neben seiner Aufgabe als Träger einer temperaturanzeigenden Substanz muß der Schirm noch als akustisch-thermischer Wandler wirken [26]. Er hat dabei möglichst restlos die auffallende Schallenergie in Wärme umzusetzen. Rückwirkungen des Schallfeldes auf den Strahler wären dadurch ausgeschlossen. Dabei muß das Wärmeleitvermögen des Materials so beschaffen sein, daß eine schnelle Wärmeabgabe an die Anzeigesubstanz erfolgt, ohne daß dabei durch zu schnelle Wärmeleitungsenkrecht zum Schallstrahl eine Verwaschung der Bilder auftritt.

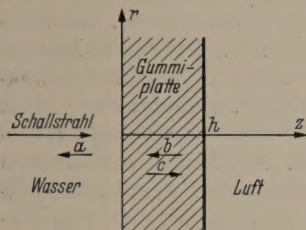


Abb. 1. Schema eines Absorptionsschirmes.

1. Die Temperaturverteilung im Absorptionsschirm.

Welche Temperaturverteilung ist in einem

homogenen Schirm endlicher Dicke zu erwarten? Zur Vereinfachung soll als Intensitätsverteilung die einer Planwelle angenommen werden. Über den ganzen Schirm ist also die Schallintensität konstant. Die Planwelle falle von links senkrecht auf eine Platte der Dicke h und werde an der Ebene $z = h$, die die Grenzfläche zwischen Platte und Luft bildet, reflektiert. Die Amplitude der Welle nimmt in der Platte $0 \leq z \leq h$ durch Absorption ab. Das Reflexionsvermögen der Ebene $z = 0$ wird bei den folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt, weil der nach links reflektierte Anteil a der von links kommenden Welle keinen Beitrag zur absorbierten Energie liefert und der nach rechts reflektierte Teil c der von rechts auf die Ebene $z = 0$ fallenden Energie b zur Energie des primären Strahles addiert werden kann. Die auf der Wegstrecke dz pro Zeiteinheit absorbierte Energie dE der in der Platte von links nach rechts bzw. von rechts nach links fortschreitenden Welle ist:

$$\left. \begin{aligned} dE_l &= E_0 \{ \exp(-\alpha z) - \exp(-\alpha [z + dz]) \} \\ \text{bzw.} \\ dE_r &= E_1 \{ \exp \alpha [z + dz] - \exp \alpha z \} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

E_0 und E_1 sind die pro Zeiteinheit auf die Ebene $z = 0$ von links bzw. von rechts auffallenden Energien der beiden sich überlagernden Wellen. α ist der Absorp-

tionskoeffizient. Zwischen E_0 und E_1 besteht die Beziehung:

$$E_1 = RE_0 \exp(-2\alpha h). \quad (2)$$

$0 \leq R \leq 1$ ist das Reflexionsvermögen der Fläche $z = h$. Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung von dz ergibt sich die pro Zeit- und Längeneinheit absorbierte Energie:

$$\dot{E} = \alpha E_0 \exp(-\alpha h) \{ \exp \alpha [h - z] + R \exp(-\alpha [h - z]) \} \quad (3)$$

woraus sich nach Umrechnung auf Wärmeeinheiten und nach Division durch die spezifische Wärme des Materials die Temperaturänderung pro Zeiteinheit im Schirm ergibt.

An Hand eines Zahlenbeispiels soll die Temperaturänderung ausgerechnet werden. Unseren Versuchen lagen etwa folgende Daten zugrunde: Spezifische

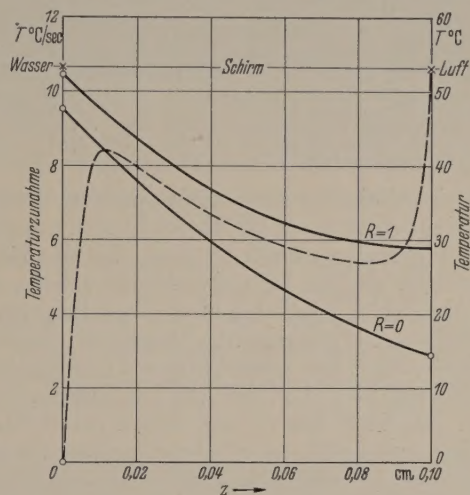


Abb. 2. Temperaturzunahme pro Sekunde in einem Absorptionsschirm (Absorptionskoeffizient 12 1/cm). Ebene Schallwelle (1 Watt/cm^2) fällt von links auf. Energie wird bei $z = 0,1$ a) reflektiert ($R = 1$), b) absorbiert ($R = 0$). Gestrichelte Kurve: Temperaturverteilung nach 5 Sek. Beschallung bei endlicher Wärmeleitung und Oberflächenabsorption bei $z = 0,1$.

Wärme des Materials $s = 0,3 \text{ cal/g} \cdot \text{Grad}$, Schirmdicke $h = 0,1 \text{ cm}$, Absorptionskoeffizient $\alpha = 12 \text{ 1/cm}$, auffallende Schallintensität $E_0 = 1 \text{ Watt/cm}^2 = 0,239 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec}$. Es werden die beiden Fälle diskutiert, die durch die Grenzwerte eins und null des Reflexionsvermögens R gegeben sind. Sein wirklicher Wert liegt dazwischen. Mit diesen Zahlenwerten ergibt sich bei Benutzung von Gl. 3 die Temperaturänderung pro Sekunde:

$$\left. \begin{aligned} \dot{T} &= 12 \cdot 0,24 \cdot \exp(-12 \cdot 0,1) \cdot F(z)/0,3 \\ &= 0,289 \cdot F(z), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wobei

$$F(z) = \begin{cases} 2 \coth 12 [0,1 - z] & \text{für } R = 1 \\ \exp 12 [0,1 - z] & \text{für } R = 0 \end{cases}$$

ist.

Die beiden ausgezogenen Kurven in Abb. 2 stellen den Temperaturanstieg pro Sekunde im Schirm als Funktion des Abstandes von der vom Wasser bespülten Fläche dar. Da das Wärmeleitvermögen vernachlässigt ist, treten bei beiden Kurven an der Stelle $z = 0$ Unstetigkeiten auf, weil diese Grenzfläche auf die Temperatur des Wassers gehalten wird. Bei der Kurve $R = 0$ tritt auch an der Stelle $z = 0,1$ eine Unstetigkeit auf, da hier die Temperaturzunahme wegen vollständiger Absorption der auffallenden Energie außer-

ordentlich groß wird. Die wirkliche Temperaturverteilung im Schirm läßt sich bei Benutzung dieser beiden soeben ermittelten Kurven und bei Berücksichtigung eines endlichen Wärmeleitvermögens des Schirmes nur qualitativ angeben. Die im Innern abgeschätzte und an der Oberfläche mit Hilfe von Wärmefarben gemessene Temperaturerhöhung gegenüber der Wassertemperatur nach 5 Sekunden Beschallung ist in der Abbildung gestrichelt eingezeichnet. Es sind die beiden Temperaturmaxima zu beachten, an denen leicht eine Verbrennung des Schirmes bei zu großer Intensität erfolgen kann.

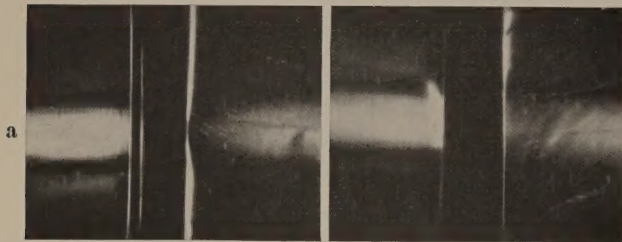


Abb. 3. Ein Ultraschallbündel (1,81 MHz) trifft in Paraffinöl auf einen 1,2 mm starken Gummischirm. Schirmseite mit Textilauflage und Wärmeschliere
a rechts, b links.

Die akustisch-thermische Bildwandlung des Schirmes, die auf Absorption im Material beruht, läßt sich, wie schon gesagt, dadurch erhöhen, daß das Reflexionsvermögen der an Luft grenzenden Fläche $z = h$ durch Absorption möglichst klein gemacht wird. Aus verschiedenen Gründen sind die beiden sich überlagernden Abbildungen des Schallfeldes auf dem Schirm etwas unscharf, was aber, wie wir bei unseren Experimenten gefunden haben, sich kaum auswirkt. Die Unschärfe des durch räumliche Absorption entstandenen Bildes ist durch das Wärmeleitvermögen des Schirmmaterials verursacht, während die Unschärfe

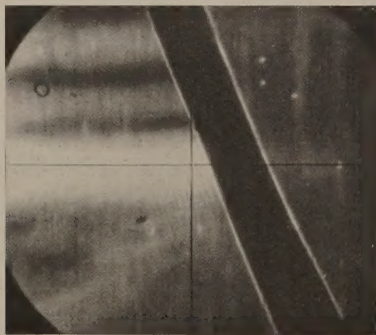


Abb. 4. Ein Ultraschallbündel (1,78 MHz) trifft in Wasser auf einen 1,3 mm starken Gummischirm. Farbschicht auf Textilauflage auf der rechten Seite des Schirmes. Reflexion gering.

des durch Oberflächenabsorption entstandenen Bildes durch die radial auseinanderlaufende Oberflächenwelle eines totalreflektierten begrenzten Schallstrahles bedingt ist.

Das Reflexionsvermögen R ist das Produkt zweier Faktoren. Der eine ist durch den großen Unterschied der Schallwiderstände von Gummi und Luft bedingt und ist nahezu gleich eins. Der andere hängt von der an Luft grenzenden Oberfläche des Gummis ab, die so beschaffen sein muß, daß die bei jeder Totalreflexion auftretende Oberflächenwelle stark absorbiert wird. Hierdurch wird der zweite Faktor klein.

Diese Oberflächenwelle tritt nach den Untersuchungen verschiedener Autoren [19] bei der Totalreflexion eines schräg einfallenden Strahles an einem dünneren Medium auf und bewirkt eine Strahlversetzung. Bei einem senkrecht auffallenden begrenzten Strahlbündel liegen die Verhältnisse ähnlich wie bei einer schräg einfallenden unendlich ausgedehnten Welle. Nach SCHOCH [20] läßt sich ein Wellenfeld von begrenztem Querschnitt durch Überlagerung ausgedehnter ebener Wellen verschiedener Richtung darstellen.

2. Der Aufbau des Schirmes.

Es wurden Versuche mit Schirmen aus Cellophan, Bakelit, Polystyrol, Igelit, Plexiglas, Hartgummi, Buna und Kautschuk durchgeführt. Am besten geeignet waren Buna und Kautschuk mit einem möglichst geringen Anteil von Füllstoffen. Der Schallwiderstand solch eines Schirmes war nahezu gleich dem des Wassers, so daß fast die ganze auffallende Schallenergie in den Schirm eindrang. Die an Luft grenzende Fläche trug zwecks besserer Absorption der Oberflächenwelle eine Gewebeauflage mit der in einer Lackschicht eingebetteten Wärmefarbe. Für unsere Versuche wurde Buna S verwendet. Die Dicke des Schirmes hängt, damit er bei guter akustischer Anpassung an Wasser reflexfrei arbeitet, von der benutzten Schallfrequenz ab. Die verwendeten Bunaplatten hatten bei Schallfrequenzen von 0,4 bis 2 MHz mit Gewebeauflage und Farbschicht eine Dicke von 1,9 bis 0,6 mm. Als Auftragslacke wurden verwendet: 1. Trolitul in Benzol, 2. Chlorkautschuk in Benzol oder Xylol, 3. Cellulose-triacetat in Methylenchlorid, 4. Silikonlack L 152. Letzterer wurde uns von der Firma Heyden in Radebeul zur Verfügung gestellt. Bei Lack 1 machte sich die geringe Temperaturbeständigkeit störend bemerkbar. Schon nach kurzer Beschallung wurde durch Blasenbildung die Schicht zerstört. Besser eigneten sich Lack 2 und 3, jedoch störte bei dem uns zur Verfügung stehenden Chlorkautschuk die leicht bräunliche Färbung, während bei Lack 3 die große Sprödigkeit unangenehm in Erscheinung trat. Die besten Erfahrungen wurden mit Silikonlack gemacht. Zwar traten bei der Herstellung der Schirme zuerst beim Einbrennen des Lackes Schwierigkeiten auf, da bei den dazu vorgeschriebenen Temperaturen von 200–250° die Bildwandlersubstanz sich bereits zersetzte. Es wurde aber auch eine ausreichende Festigkeit bei 60° bzw. 80° erhalten. Man mußte allerdings die Behandlungszeit auf 48 bzw. 24 Stunden heraufsetzen.

3. Die experimentelle Erprobung des Schirmes.

Die Wirkungsweise des Schirmes wurde nach der üblichen Schlierenmethode untersucht. Obwohl der Schirm im Betrieb die Trennwand zwischen Flüssigkeit und Luft bildet, wurden die Schlierenuntersuchungen bei vollständigem Tauchen des Schirmes in die Flüssigkeit durchgeführt.

Daß die Textilaufgabe die Absorption der Oberflächenwelle wesentlich erhöht, zeigt Abb. 3. In der Auflage tritt eine deutlich ausgeprägte Wärmeschliere auf, wobei es gleichgültig ist, auf welche Seite zum Schallstrahl die Gewebeschicht gekehrt ist. Denn nach mehrmaliger Reflexion an den den Schirm begrenzenden parallelen Wänden ist für die im Schirm laufenden Wellen die Richtung des primär einfallenden Strahles

nicht mehr ausgezeichnet. Daß die Schliere bei *a* dunkel und bei *b* hell erscheint, ist nur durch die Optik bedingt und bedeutet keine Verschiedenartigkeit der Wärmeschliere. Abb. 4 zeigt, daß der verwendete Schirm nur ein geringes Reflexionsvermögen hat und somit den größten Teil der auffallenden Schallenergie in Wärme überführt. Der nach links unten reflektierte Strahl ist gegenüber dem von links einfallenden primären Strahl nur schwach ausgeprägt.

Zur Erprobung des entwickelten Schirmes als akustisch-thermisch-optischer Wandler wurde mit ihm das Schallfeld eines Quarz- und eines selbst hergestellten Bariumtitanat-Schwingers aufgenommen. Beide Schwinger waren in ihrer Grundfrequenz von 2 MHz angeregt. Ihre strahlende Fläche betrug 10 cm² bei einer integralen Schalleistung von etwa 3 Watt. Das Medium zwischen Schwinger und Schirm war Wasser von 15° C. Die Entfernung Schirm—Schwinger betrug beim Quarz 5 cm und beim Bariumtitanat-Schwinger 55 cm. Abb. 5 zeigt die beiden nach 5 Sekunden nach Einschalten des Schallfeldes gemachten Aufnahmen. Die Unsymmetrie des durch den Quarz erzeugten Bildes ist durch seine geringe Keilförmigkeit bedingt.

Abb. 6 zeigt die Schallschattenprojektion eines Blechkreuzes aus Kupfer bzw. Aluminium auf den Schirm. Von ihm war bei beiden Aufnahmen das Kreuz 1,5 cm entfernt. Sie wurden mit den gleichen Schwingern unter den gleichen Bedingungen wie Abb. 5 gemacht, nur betrug die Entfernung vom Schirm beim Quarz 10 cm und beim Bariumtitanatschwinger 5 cm. Die Kontrastarmut aller Bilder ist nur durch die Schwarz-Weiß-Wiedergabe der sonst farbigen Abbildungen bedingt.

III. Technische Anwendung.

Es ist hier gezeigt worden, daß der entwickelte Schirm die an ihn gestellten Aufgaben weitgehendst erfüllt. An Stelle der benutzten Wärmefarbe ließen sich auch jede andere thermotrope oder phototrope Substanz sowie Phosphore verwenden. Es wäre beispielsweise vorteilhaft, direkt das Gewebe mit Wärmefarben anzufärben. Die phototropen Anile und Fulgide wären hierfür geeignet [25]. Der große Vorteil der akustisch-thermischen Bildwandlung gegenüber den rein mechanisch arbeitenden ist der, daß auf die Schallquelle fast keine Rückwirkung ausgeübt wird, da der Schirm sehr reflexfrei arbeitet. Hinzu kommt noch, daß das Verfahren nicht so empfindlich gegen Erschütterungen ist, wie die meisten rein mechanisch arbeitenden. Es wäre beispielsweise in einem Walzwerkbetrieb zur Untersuchung von Doppelungen in Blechen derart anzuwenden, daß das zu untersuchende Blech senkrecht in einer mit einer Flüssigkeit gefüllten Wanne langsam an einer Reihe von Schwingern vorbeigezogen wird, denen auf der anderen Seite des Bleches ein als breiter Streifen ausgestalteter Bildschirm gegenübersteht. Da die entstehenden Bilder eine gewisse Trägheit besitzen, müßte der Schirm nach Art einer Kippschwingung bewegt werden, so daß immer genügend ausgeruhte und gelöschte Stellen zur Abbildung benutzt werden.

Zusammenfassung.

Nach einer Prüfung wärmeanzeigender Stoffe auf ihre Brauchbarkeit in der Ultraschalltechnik werden die Salze des Quecksilberjodids als geeignetes Material für die durchzuführenden Versuche eingehender besprochen. Auf die Möglichkeit, für den gleichen Zweck andere thermotrope oder phototrope Substanzen zu verwenden, wird hingewiesen, nachdem drei weitere mit Erfolg verwendet wurden. Es wird der Aufbau eines Bildwandlerschirmes für Ultraschallzwecke beschrieben. Dieser verwandelt nahezu restlos

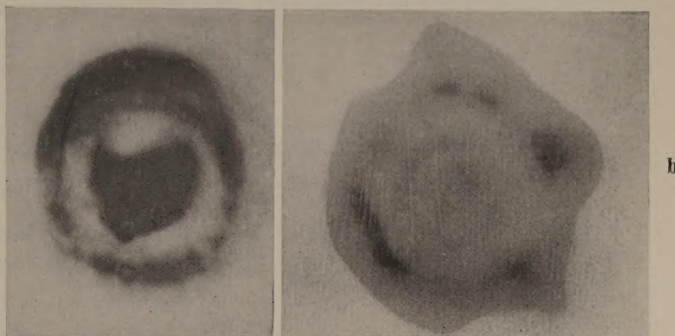


Abb. 5. Schallfeld eines Schwingers aus *a* Quarz, *b* Bariumtitanat.

die auffallende Schallenergie in Wärme und übt dadurch keine Wirkung auf die Schallquelle aus. Nach einer Betrachtung über die Wärmeverteilung im Schirm bei der Schallabsorption werden die dargelegten Vorstellungen durch Experimente bestätigt. Schlierenaufnahmen zeigen die Stellen stärkerer Er-

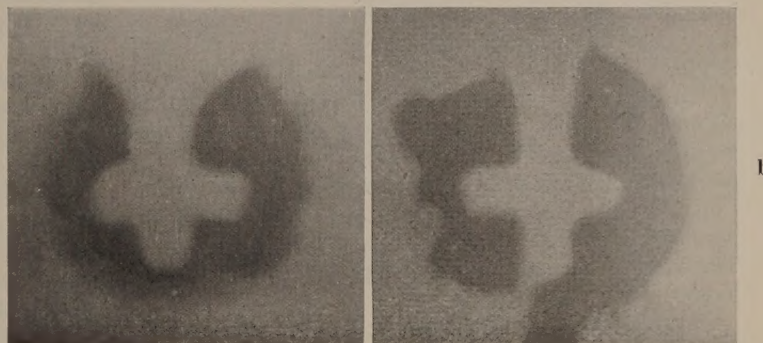


Abb. 6. Schallschattenprojektion eines Blechkreuzes. Schwinger aus *a* Quarz, *b* Bariumtitanat.

wärmung qualitativ an. Aufnahmen von Schallfeldern erweisen die Brauchbarkeit des entwickelten Schirmes.

Herrn Professor Dr. MESSERSCHMIDT danken wir für sein stets förderndes Interesse. Herr Dipl. Phys. SPENGLER stellte uns dankenswerterweise die Aufnahmen nach der Schlierenmethode her.

Der Staatlichen Plankommission und dem Deutschen Amt für Maß und Gewicht danken wir für die Bereitstellung von Mitteln zur Durchführung der Arbeit.

Literatur [1] BERGMANN, L.: Der Ultraschall, Hirzel, Stuttgart 1949, S. 551, 625. — [2] CARLIN, B.: Ultrasonics, McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1949, S. 142. — [3] CHOMSE, H., W. HOFFMANN u. P. SEIDEL: Naturwiss. **40**, 288 (1953). — [4] BENNETT, G. S.: J. ACOUST. Soc. Am. **23**, 478 (1951); **24**, 470 (1952). — [5] ECKARDT, A. u. O. LINDIG: Ann. Phys. (6) **7**, 410 (1950). — [6] ERNST, P. J.: J. ACOUST. Soc. Am. **23**, 80 (1951). — [7] ERNST, P. J. and CH. W. HOFF-

MANN: J. ACOUST. Soc. Am. **24**, 207 (1952). — [8] GMELIN-KRAUT's Handbuch d. anorg. Chemie, Band V 2, Heidelberg 1914, S. 1279. — [9] GUTHMANN, K.: ATM-Blatt V 215-3, Dezember 1943; V 215-4, Juli 1947. — [10] HAUL, R., H. J. STUDT u. H. H. RUST: Angew. Chem. **62**, 186 (1950). — [11] HECHT, H.: Präparative anorg. Chemie, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951, S. 100. — [12] F., JANTSCH: Farbe und Lack 115 (1940). — [13] MARCKWALD, W.: ZS Phys. Chem. **30**, 140 (1899). — [14] MEYER, W.: Deutsche Parfümeriezeitung **27**, 84 (1941). — [15] PETERMANN, L.: Helv. Phys. Acta **24**, 596 (1951). — [16] POHLMANN, W.: ZS Phys. **113**, 697 (1939); Technik **3**, 465 (1948); ZS angew. Phys. **1**, 181 (1948). — [17] ROSENBERG, K.: Experimentierbuch, Alfred Hölder, Wien 1908, Bd. I, S. 166. — [18] RUST, H. H.: Angew. Chem. **64**, 308 (1952); Angew. Chem. **65**, 249 (1953). — [19] SCHOCH, A.: Erg. exakt. Naturw. **23**, 161 (1950); Acustica

2, 18 (1952). — [20] SCHOCH, A.: Acustica **2**, 10 (1952). — [21] SCHREIBER, H. u. W. DEGNER: Ann. Phys. (6) **7**, 27, (1950); Naturw. **37**, 358 (1950). — [22] SCHUSTER, K.: Jenaer Jahrbuch **2**, 217 (1951). — [23] SETTE, D.: J. ACOUST. Soc. Am. **21**, 375 (1949). — [24] SOKOLOV, S. J.: U. S. Patent **2** 164, 125. — [25] STOBBE, H.: Ann. Chemie **359**, 1 (1908); Ann. Chemie **380**, 1 (1911); Sächs. Akad. Wiss. (Math.-Phys. Kl.) **74**, 161 (1922). — [26] TIELSCH, H. u. A. BOCZEK: DDR. W-Patent 42 s/27487 (1953) angemeldet. — [27] WEISSLER, A.: J. Acoust. Soc. Am. **25**, 651 (1953). — [28] Zeiß Ikon AG Dresden, Schweizer Patent 216 125 (1941). — [29] ZINCKE, TH.: Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. **21**, 1041 (1888).

Dr. H. TIELSCH, A. BOCZEK,

Institut für Experimentelle Physik der Universität
Halle (Saale), Friedemann-Bach-Platz 6.

Die physikalischen Vorgänge in Diffusions- und Dampfstrahl-Pumpen*.

I. Die Strömungseigenschaften des Treibstrahles und die Vorvakuumfestigkeit.

Von HANS-GEORG NÖLLER.

Mit 15 Textabbildungen.

(Eingegangen am 18. September 1954.)

GAEDE erkannte, daß durch Diffusion der abzusaugenden Gase in einen Dampfstrom hinein sehr niedrige Drucke zu erreichen sind und konstruierte die Diffusionspumpe [1]. Aus den allgemeinen Diffusions- und Effusions-Gleichungen leitete er die Konstanz der Sauggeschwindigkeit bis zu den niedrigsten Drucken sowie die Abhängigkeit von Gasart, Dampfdichte und Vorvakuumdruck ab. Die quantitativen Aussagen gelten im Wesentlichen jedoch nur für die erste GAEDESche Pumpe, in der die Diffusion der Gase besonders übersichtlich durch einen engen Spalt in einen Quecksilberstrom kleiner Geschwindigkeit erfolgte.

LANGMUIR [2], CRAWFORD [3], COPLEY [4], sowie GAEDE [5] selbst verbesserten die erste Diffusionspumpe wesentlich durch Anwendung eines Treibdampfstrahles mit hoher Geschwindigkeit. In dieser Form, die sich formal kaum von den schon damals bekannten Ejektoren unterscheidet, werden Diffusions-, Treibdampf- (Booster) und Dampfstrahlpumpen auch heute noch gebaut¹.

Parallel zu der Entwicklung der Pumpen bis zu ihrer heutigen Leistungsfähigkeit erschien eine Anzahl von Arbeiten, die sich mit Messungen und theoretischen Überlegungen beschäftigten. Interessant ist, daß auch verkehrte Hypothesen, die teilweise sogar das Diffusionsprinzip ablehnen, zu guten Konstruktionen geführt haben.

Da der Dampfstrom, der die abgesaugte Luft in das Vorvakuum befördert, unter einem sehr viel höheren Druck steht, als die Luft auf der Saugseite, strömt stets Dampf der abgesaugten Luft entgegen. GAEDE zeigte in seinen grundlegenden Veröffentlichungen, daß die Diffusionspumpe nur dann arbeitet, wenn dieser Rückstrom des Dampfes hinreichend gering ist. Als

Bedingung hierfür leitete er ab, daß die Breite des Spaltes, der den Dampfstrom und den Hochvakuumraum verbindet, die mittlere freie Weglänge an dieser Stelle nicht überschreiten darf. Dieser Satz gilt für einen langsamen Dampfstrom, verliert jedoch seine Bedeutung für sehr hohe Treibdampfgeschwindigkeit. Da Pumpen mit großen Spalten bei hohen Dampfgeschwindigkeiten funktionieren, die also offenbar die GAEDESche Spaltbedingung nicht erfüllen, wurde wiederholt versucht, das Diffusionsprinzip als solches zu widerlegen. Diese Schlußweise ist jedoch unzulässig.

Vielmehr führen die GAEDESchen Vorstellungen zum Verständnis der Vorgänge im Bereich niedriger Ansaugdrucke auch für Pumpen mit hoher Strahlgeschwindigkeit. JAECKEL [6] gelangen quantitative Aussagen durch modellmäßige Vereinfachung. Seine Formeln gebendie auf den Ansaugquerschnitt bezogene Saugleistung in Abhängigkeit von Gasart, Vorvakuumdruck und Geschwindigkeit im Treibstrahl in guter Näherung wieder. Die alte GAEDESche Forderung, daß nicht zuviel Dampf der abzusaugenden Luft entgegenströmen darf, wird von JAECKEL durch Einbeziehung eines Dampfsaumes in die Rechnung berücksichtigt, durch den die abgesaugte Luft vor ihrem Eintritt in den Strahl hindurch diffundieren muß. Die GAEDE-JAECKELSche Theorie berücksichtigt als einzige Strömungseigenschaft die Dampfgeschwindigkeit. DAYTON [7] beobachtet andererseits in der Diffusionspumpe Verdichtungsstöße, in denen der Anstieg auf den Vorvakuumdruck erfolgt. Er führt die Länge des Treibstrahles bis zum Verdichtungsstoß in eine von GAEDE [1] und später von MATRICON [8] aufgestellte Gleichung für die Abhängigkeit des Endvakuums vom Vorvakuum ein und kann so das Endvakuum für verschiedene Gase richtig wiedergeben.

Eine systematische Untersuchung der Strömung des Treibstrahles und der Zusammenhang mit den Eigenschaften der Pumpe liegt jedoch nicht vor. Merkwürdigerweise wurde auch die Eindringtiefe der Luft in den Strahl noch nicht untersucht. JAECKEL setzt, ohne es besonders zu erwähnen, vollständige

* Eine summarische Darstellung der Ergebnisse unserer Arbeiten aus den letzten Jahren wurde bereits [19] gegeben. Die folgenden Mitteilungen enthalten eine detailliertere Beschreibung unserer Untersuchungen.

¹ Diffusionspumpen arbeiten im Bereich niedriger Ansaugdrucke (10^{-3} – 10^{-7} Torr), Dampfstrahlpumpen haben ihr Saugleistungsmaximum bei etwa 10^{-1} Torr und Booster bei 10^{-2} Torr.

urchdringung des Strahles durch Diffusion vor-
is¹.

Es wird sich zeigen, daß die Berücksichtigung von
trahleigenschaften und Eindringtiefe den Schlüssel
im Verständnis der Dampfstrahl- und Treibdampf-
booster-)Pumpen liefert, die durch die GAEDE-
AECKELSche Theorie der Diffusionspumpe nicht er-
läßt werden. Für den Sonderfall der Diffusionspumpe
folgt die JAECKELSche Formel für die Sauggeschwin-
digkeit. Darüber hinaus wird ein umfassenderes Ver-
ständnis auch der Diffusionspumpe möglich.

In diesem Aufsatz wird durch gasdynamische Be-
andlung und Sichtbarmachung von Quecksilberdampf
einer Gasentladung die Strömung im Mischraum und
er anschließenden Staudüse beschrieben, was schon
um Verständnis der Vorvakuumseigenschaften führt.

In einem nächsten Aufsatz werden dann die Durch-
ringung des Treibstrahles mit der abgesaugten Luft
und die hieraus folgenden Saugleistungseigenschaften
behandelt.

Anhand von Abb.1 sei an den grundsätzlichen Auf-
bau einer Dampfstrahlpumpe und einer Diffusions-
pumpe erinnert. In dem Siedekessel wird das Treib-
mittel, beispielsweise Quecksilber oder Öl verdampft.
Der Dampf strömt durch die Treibdüse, breitet sich im
Mischraum aus, wo die abzusaugende Luft, die hier
unter dem Ansaugdruck steht, in den Strahl eintritt.
In der Staudüse erfolgt unter Geschwindigkeitsverlust
der Druckanstieg auf den Vorvakuumdruck. Das
Treibmittel kondensiert an den gekühlten Flächen der
Staudüse und läuft in den Siedekessel zurück.

Da die Dampfstrahlpumpen bei höheren Drucken als
die Diffusionspumpen arbeiten, muß auch der Druck
im Siedekessel und damit die Flüssigkeitssäule im
Rücklaufrohr höher sein.

Formen der Überschallströmung des Treibdampfes.

Abb. 2 zeigt den für Diffusions- und Dampfstrahl-
pumpen typischen Verlauf des Druckes P_V , auf der
Vorvakuumseite in Abhängigkeit des Ansaugdruckes
 P_H auf der Hochvakuumseite der Pumpen. Bei nied-
rigen Ansaugdrucken (Kurventeil C B) bewirkt die
Pumpe einen erheblichen Druckanstieg der an-
gesaugten Luft auf den Vorvakuumdruck. Bei höheren
Ansaugdrucken läßt die Pumpwirkung jedoch nach,
bis schließlich (Punkt A) überhaupt kein Druckanstieg
mehr erzielt wird ($P_V = P_H$). Wie die folgende Unter-
suchung zeigen wird, läßt sich dieses Verhalten der
Pumpe durch die Strömungseigenschaften des Treib-
strahles erklären. Insbesondere werden sich zwei
typische Strömungsformen ergeben. Abb. 3a zeigt die
Strömung, die sich bei zu hohem Ansaugdruck aus-
bildet (Arbeitspunkt A Abb. 2). Der Dampf durch-
strömt bei dem Druck seiner Umgebung $P_V = P_H$ die
Staudüse ohne ihre Wände zu erreichen. Eine Pump-
wirkung tritt nicht ein. Abb. 3a zeigt auch den Druck-
verlauf in der Achse der Pumpe. Der Dampf expan-
diert vom Druck im Siedekessel P_0 auf den Vorvakuum-
druck $P_V = P_H$ und bleibt entlang der Staudüse kon-
stant. Abb. 3b zeigt den Strömungszustand im Ar-
beitsbereich der Pumpe (Punkt C Abb. 2) und den
entsprechenden Druckverlauf. In der Treibdüse sowie

im Mischraum expandiert der Dampf wegen des nied-
rigen Ansaugdruckes P_H sehr stark. In einem Ver-
dichtungsstoß springt der Druck dann auf den wesent-
lich höheren Wert \hat{P} und steigt im Verlauf der Stau-
düse noch etwas weiter auf den Vorvakuumdruck P_V .

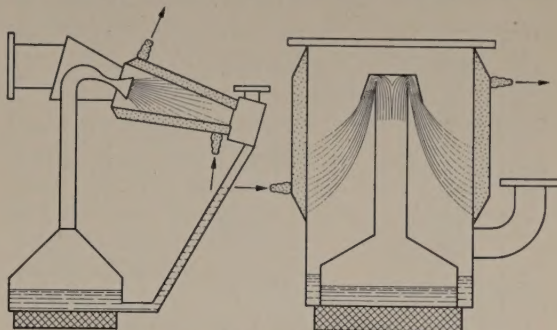


Abb. 1. Aufbau einer Dampfstrahlpumpe (links) und einer Diffusionspumpe (rechts).

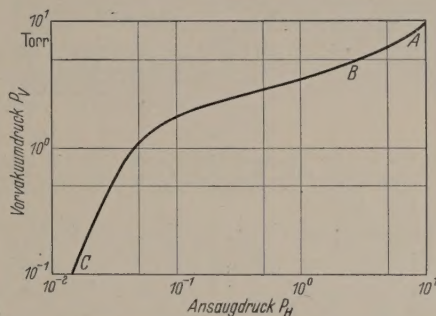


Abb. 2. Vorvakuumdruck P_V in Abhängigkeit von Ansaugdruck P_H bei Betrieb einer Dampfstrahlpumpe. Druck im Siedegefaß $P_0 = 30$ Torr.

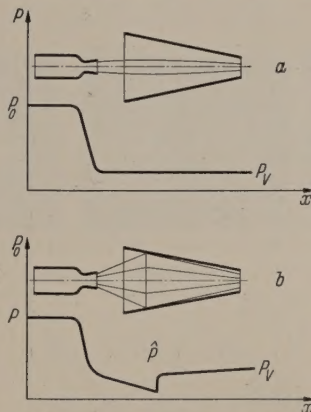


Abb. 3. Strömungsformen und Verlauf des Druckes im Treibstrahl a bei zu hohen Ansaugdrucken, b im Arbeitsbereich.

Bei allen Pumpen muß der Druck P_0 im Siedege-
faß stets wesentlich höher als der Ansaugdruck sein,
um überhaupt eine Pumpwirkung zu erzielen (Abb. 2,
Kurventeil C B). Durch die starke Expansion vom
Druck im Siedegefaß auf den Druck im Mischraum
entsteht daher Überschallgeschwindigkeit im Treib-
strahl.

Berechnung der Überschallströmung des Treibdampfes.

Zur Berechnung bieten sich die bekannten gas-
dynamischen Methoden an [9—12]². Die Vorgänge in

¹ Die Staudüse kann auch ohne Verdichtungsstoß durch-
strömt werden, wenn P_V sehr niedrig ist.

² Die experimentellen Ergebnisse dieser Arbeit und der
Mitteilg. III u. IV zeigen, daß sie auch in diesem Gebiet nied-
riger Drucke mit den gasdynamischen Berechnungen im Ein-
klang stehen.

¹ Die Theorie der Strahlapparate für wesentlich höhere
Drucke macht auch die Voraussetzung vollständiger Durch-
mischung. Diese erfolgt jedoch nicht durch Diffusion, son-
dern durch Turbulenz.

Düsen, in denen die Stromlinien fast parallel verlaufen, werden zweckmäßig eindimensional berechnet. Für die eingehendere Untersuchung des freien Strahlrandes im Mischraum eignet sich die PRANDTL-MEYERsche zweidimensionale Lösung. Man setzt bei der gasdyna-

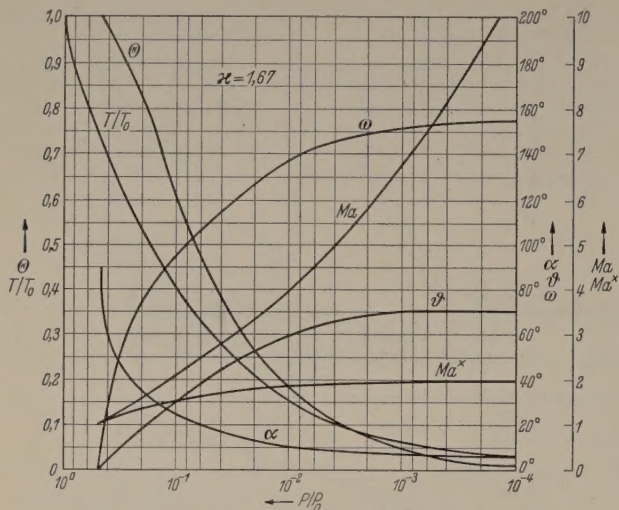


Abb. 4. Zustandsgrößen des Quecksilberdampfes ($\kappa = 1,67$) in Abhängigkeit des Expansionsverhältnisses P/P_0 . Bedeutung der Winkel α , θ , ω siehe Abb. 6.

mischen Rechnung adiabatische Zustandsänderung des strömenden Mediums voraus und erhält dann einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Expansionsverhältnis P/P_0 und sämtlichen anderen Zustandsgrößen (Abb. 4 und Abb. 5). Die MACH-Zahl M_a ist das Ver-

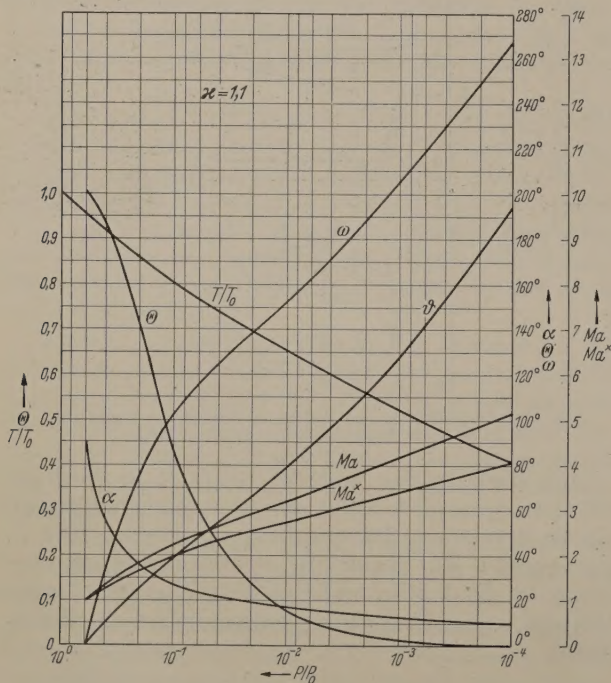


Abb. 5. Zustandsgrößen von organischen Dämpfen ($\kappa = 1,1$) in Abhängigkeit des Expansionsverhältnisses P/P_0 . Bedeutung der Winkel α , θ , ω siehe Abb. 6.

hältnis der Geschwindigkeit zur örtlichen Schallgeschwindigkeit, M_a^* zur kritischen Geschwindigkeit, T/T_0 das Verhältnis von örtlicher zur Ruhetemperatur, θ von örtlicher Stromdichte zu kritischer Stromdichte. Abb. 6 zeigt die Bedeutung des Ablenkungswinkels ϑ der Stromlinien und des Polar-

winkels ω in der PRANDTL-MEYER-Strömung¹. Bemerkenswert ist, daß auf einem von der Ecke (Rand der Treibdüse) ausgehenden Radius alle Größen der Strömung also auch die Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag konstant sind. Der Winkel α zwischen Stromlinie (Geschwindigkeitsrichtung) und Radius ist der MACHsche Winkel für den $\sin \alpha = 1/M_a$ gilt. Allgemein heißen die Linien, auf denen sich (kleine) Störungen fortpflanzen und die die Stromlinien unter dem MACH-Winkel schneiden, MACH-Linien.

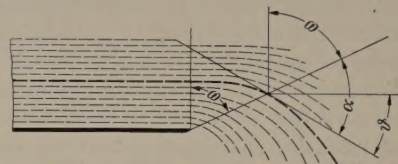


Abb. 6. PRANDTL-MEYER-Strömung eines Gases mit Schallgeschwindigkeit in ein Vakuum.
 ω = Polarwinkel der MACH-Linie. Für die MACH-Linie bei Schallgeschwindigkeit gilt $\omega = 0$
 α = MACH-Winkel zwischen Strömungsrichtung und MACH-Linie
 ϑ = Ablenkungswinkel der Stromlinien. Es gilt $\omega + \alpha = \vartheta + \pi/2$.

Zur Berechnung beliebiger zweidimensionaler Strömungen dient das Charakteristikenverfahren, das sich aus der PRANDTL-MEYER-Lösung als graphisches Näherungsverfahren ableitet. Für die schrittweise Konstruktion der Stromlinien ist die gleichzeitige Konstruktion der MACH-Linien oder Charakteristiken wesentlich. Man unterscheidet Verdichtungslinien, bei deren Überschreitung Verdichtung und Verdünnungslinien, bei deren Überschreitung Verdünnung erfolgt. Gleichzeitig mit der Verdichtung oder Verdünnung

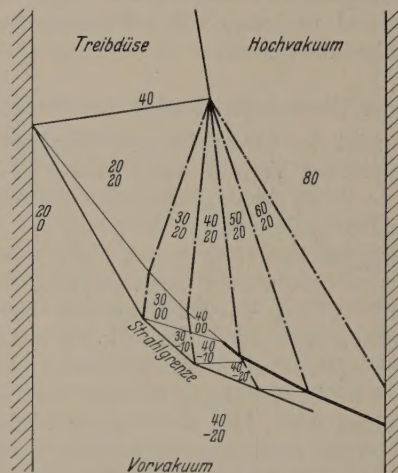


Abb. 7. Strömung aus einer Ringdüse einer Diffusionspumpe bei zwar hohen aber noch gerade unter der Vorvakuumfestigkeit liegendem Vorvakuumdruck nach dem Charakteristikenverfahren. Die Verdichtungslinien, die vom linken Strahlrand ausgehen, treffen sich in einem Verdichtungsstoß (siehe auch Abb. 13a). Die eingetragenen Zahlen entstehen im Verlaufe der Konstruktion und sind ein Maß für Druck und Strömungsrichtung (Verdünnungslinien strichpunktiert, Verdichtungslinien schwach, Strahlengrenze mittelstark, Verdichtungsstoß stark ausgezogen).

nimmt die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Charakteristik ab oder zu. Es ändern sich daher Betrag und Richtung der Geschwindigkeit. Verdichtungslinien, die von verschiedenen Punkten ausgehen, können sich treffen, jedoch nicht überschneiden. Tref-

¹ Der kleine κ -Wert bei Öldampf, der die große innere Energie auf Grund zahlreicher Freiheitsgrade wiedergibt, ist der Grund für die starke Ablenkung der Stromlinien, die sogar mehr als 180° betragen kann. Diesem Nachteil für die Pumpwirkung steht der Vorteil einer großen MACH-Zahl, d. h. großer Schallgeschwindigkeit gegenüber.

fen bei der Konstruktion mehrere Verdichtungslinien zusammen, so tritt hier ein Verdichtungsstoß auf (siehe Abb. 7). Verdichtungsstöße sind stets mit einem Entropieanstieg verbunden. Dieser äußert sich dahin, daß der Ruhedruck (\hat{P}_0), aus dem sich die Strömung hinter dem Stoß ableiten läßt, niedriger als vor dem Stoß ist (P_0). Das Ruhedruckverhältnis \hat{P}_0/P_0 in Abhängigkeit vom Expansionsverhältnis P/P_0 ist in Abb. 8 wiedergegeben. Da der Druckanstieg in der Staudüse über einen Verdichtungsstoß erfolgt (s. Abb. 3b), wird der erreichbare Vorvakuumdruck durch den Ruhedruckverlust begrenzt. Bei der Konstruktion von Strömungen mit starken Verdichtungsstößen muß der Entropieanstieg durch Anwendung des sogenannten Stoßpolaren-Diagramms berücksichtigt werden.

Zur Berechnung in rotationssymmetrischen Anordnungen, wie sie in technischen Pumpen fast ausschließlich angewendet werden, gibt es zwar auch besondere Verfahren [11]. Da diese aber sehr umständlich sind, begnügt man sich meistens mit den zweidimensionalen Methoden, die besonders für kleine Ausschnitte der Strömung eine ausreichende Näherung darstellen.

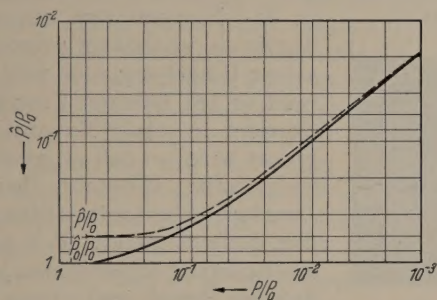


Abb. 8. Ruhedruckverhältnis \hat{P}_0/P_0 in Abhängigkeit vom Expansionsverhältnis P/P_0 für gerade Verdichtungsstöße. Das Ruhedruckverhältnis gibt an, um wieviel geringer die erreichbare Vorvakuumfestigkeit $P_V = \hat{P}_0$ gegenüber dem Druck im Siedegefäß P_0 ist.

Strömungsbilder des Quecksilberdampfes.

Um die Anwendbarkeit der theoretischen Strömungsbilder nachprüfen zu können, wurde eine experimentelle Methode zur Sichtbarmachung von Quecksilberdampf ausgearbeitet. Diese Methode liefert auch bei Düsenanordnungen, deren Berechnung sehr langwierig oder praktisch unmöglich ist, das Strömungsbild.

a) Sondenmessungen, Schlierenmethode, leuchtender Strahl.

Eine ideale Versuchsanordnung müßte Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag für jeden Ort der Strömung liefern. Dieses Ziel kann man grundsätzlich durch Sondenmessungen erreichen. Geeignete Sonden zur Geschwindigkeits- und Druckmessung sind als Staurohr, PRANDTL-Rohr und PITOT-Rohr bekannt. Voraussetzung ist ein hinreichend großer Strahlquerschnitt. Die Ausmessung der gesamten Strömung mit Sonden Punkt für Punkt ist jedoch praktisch unmöglich¹. Wenn man daher ein unmittelbar anschauliches Bild der gesamten Strömung bevorzugt, muß man andere Methoden anwenden. Die bekannte Schlieren-Methode ist in dem untersuchten Druckbereich nicht mehr empfindlich genug [18]. Als einfaches Mittel zur Sichtbarmachung des Treibmittel-

strahles hat sich die Erzeugung einer Gasentladung gezeigt. Bei den Versuchen wurde als Treibmittel Quecksilberdampf verwendet, weil die Eigenschaften des Quecksilbers bekannt sind und der Quecksilberdampf in dem untersuchten Druckbereich leicht durch eine Hochfrequenzentladung sichtbar gemacht werden kann [7, 13–18].

b) Versuchsanordnung.

Abb. 9 zeigt die Versuchsanordnung schematisch. In dem Siedegefäß G wird Quecksilberdampf erzeugt und durch das Dampfrohr R der auswechselbaren Düse D zugeleitet. In dem von der Diffusionspumpe P evakuierten Beobachtungsraum B kann sich der Dampfstrahl ausbreiten. Der Luftdruck in diesem Raum wird durch dosierten Luftenlaß geregelt und mit einem MC LEOD-Manometer gemessen. An den gekühlten Wänden K kondensiert der Dampf und das flüssige Quecksilber läuft durch das Rohr L zurück.

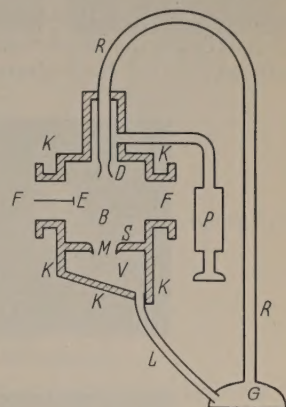
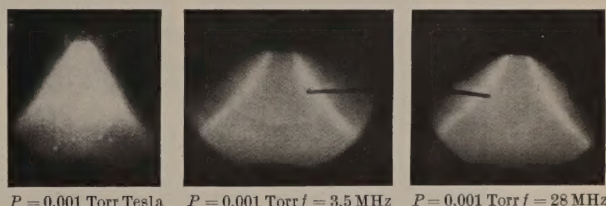


Abb. 9. Apparatur zur Sichtbarmachung der Quecksilberdampfströmung durch Anregung.
 G = Siedegefäß; D = Treibdüse; B = Beobachtungsraum.

Zur Beobachtung ist der Raum B mit vier um 90° versetzten Fenstern versehen, er ist nach unten von dem Raum V durch eine Zwischenwand S getrennt, die von einer als Mantelschliff M ausgebildeten Öffnung durchbrochen ist. In den Schliff M können zu Ver-



$P = 0,001$ Torr Tesla $P = 0,001$ Torr $f = 3,5$ MHz $P = 0,001$ Torr $f = 28$ MHz

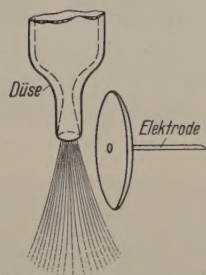


Abb. 10. Leuchtender Quecksilberdampfstrahl; links: Anregung durch Spannung eines Teslatransformators es leuchtet der „Kern“; mitte und rechts: Anregung durch Hochfrequenzspannung es leuchtet der „Saum“.

suchszwecken Staudüsen eingesetzt werden, so daß die Apparatur selbst eine Pumpe darstellt. In diesem Fall wird die Pumpe P ausgeschaltet und an dem Raum V eine Vorvakuumpumpe angeschlossen.

Zur Anregung des Quecksilberdampfes wird an der Elektrode E eine Hochfrequenzspannung angelegt.

c) MACHscher Kegel, Saum und Kern des Strahles im Mischraum.

Abb. 10 zeigt den aus einer kreisförmigen Düse in das umgebende Vakuum austretenden Quecksilber-

¹ Über Druckmessungen in der Achse des Strahles siehe IV. Mitteilung.

dampf. Zum Vergleich ist der Strömungsverlauf schematisch ebenfalls wiedergegeben.

Benutzt man zur Anregung die Spannung eines Tesla-Transformators, der kurze Spannungsschübe mit einem Abstand von etwa 10^{-3} sec liefert, so sieht man einen ziemlich scharf begrenzten, auch im Innern leuchtenden Strahl. Legt man dagegen sinusförmige Hochfrequenzspannungen mit Frequenzen zwischen 3,5 und 28 MHz an, so werden die äußeren Strahlgebiete mit kleiner Dampfdichte als helleuchtende Hülle sichtbar, während der Kern dunkel bleibt. Man erkennt, wie die Dichte des Quecksilberdampfes beim Ausströmen ins Hochvakuum am Rande des Strahles allmählich auf Null abnimmt¹.

alle die gleiche Begrenzung des Strahles. Eine nennenswerte Ablenkung des Strahles durch die Spannung hätte sich bei diesen Versuchen jedoch bemerkbar machen müssen. Auch nach Anlegen eines Gleichfeldes zusätzlich zu dem Wechselfeld konnte keine Änderung des Bildes beobachtet werden.

Die Temperaturerhöhung des Dampfes durch die Gasentladung liegt unter $0,5^\circ\text{C}$.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Störung des Strahles durch die Hochfrequenzentladung hinreichend klein ist.

e) Verschiedene Drucke in der Umgebung des Strahles (im Mischraum) bei verschiedenen Ruhedrucken (im Siedekessel).

Abb. 11 zeigt weitere Aufnahmen, die ein anschauliches Bild des Dampfstrahles beim Verlassen der Treibdüse übermitteln. Man erkennt sein Verhalten bei verschiedenen Drucken der ihn umgebenden Luft. Beim Ausströmen in das Hochvakuum expandiert der Strahl unabhängig vom Druck seiner Umgebung sehr weit, während er bei höheren Umgebungsdrucken in seiner Expansion begrenzt wird, so daß er gerade den Querschnitt annimmt, bei dem Druckgleichheit mit der umgebenden Luft herrscht. Bei genauer Beobachtung erkennt man jedoch, daß der Strahl noch etwas weiter expandiert und anschließend durch den Umgebungsdruck wieder zusammengedrückt wird. Hierdurch entstehen die bekannten periodischen Einschnürungen des Überschallstrahles. Bei niedrigen Drucken im Siedegefäß wird die Druckgleichheit zwischen Strahl und Umgebung schon bei kleinen Strahlquerschnitten erreicht.

f) Strahl mit Rechteckquerschnitt und Vergleich mit gasdynamischer Konstruktion.

Da kein allgemeiner Zusammenhang zwischen Leuchtdichte und Dampfdichte im Strahl besteht, ist eine quantitative Dichtebestimmung nicht möglich. Dagegen sind die Strahlgrenzen und bei Anbringung von Hindernissen auch einzelne MACH-Linien deutlich zu erkennen. Daher können Strahlgrenzen und MACH-Linien mit berechneten Strömungsbildern verglichen werden. Bei der Berechnung ist der Wert des Adiabatenexponenten, der entscheidend eingeht, zunächst unbekannt. Der Quecksilberdampf, der im Siedekessel als Sattedampf erzeugt wird, verwandelt sich bei der adiabatischen Expansion in der Treibdüse und im Mischraum entweder in Naßdampf oder, falls nicht genügend Zeit zu einer Kondensation verbleibt, in übersättigten Trockendampf. Als Adiabatenexponent muß im ersten Fall 1,1 im zweiten 1,67 eingesetzt werden.

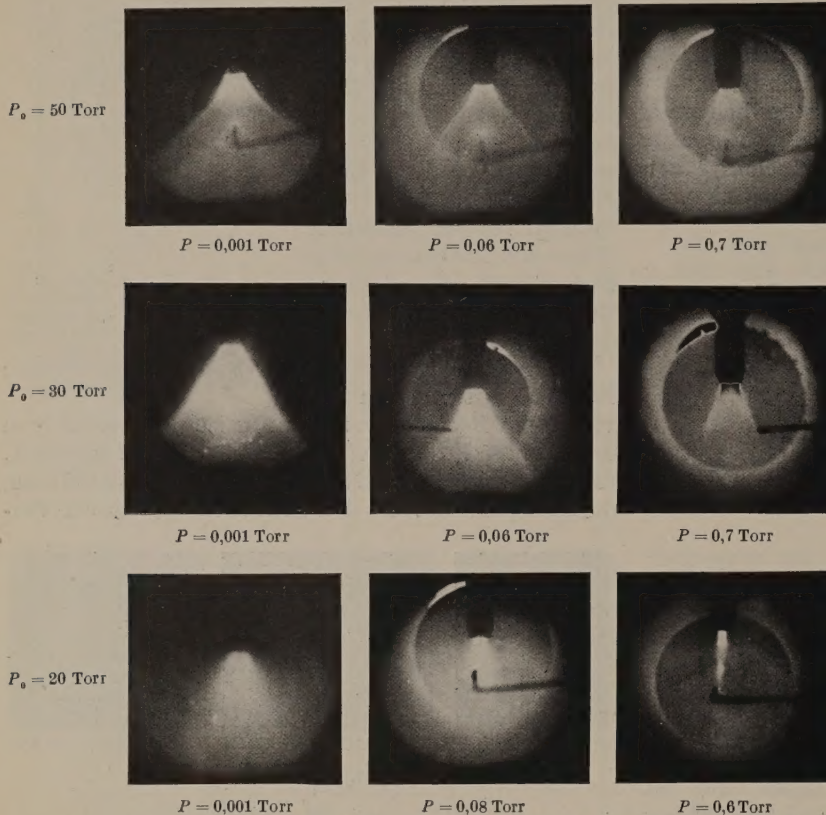


Abb. 11. Quecksilberdampfstrahl (Kreisquerschnitt) bei verschiedenen Ruhedrucken P_0 und Umgebungsdrucken P . Im Hochvakuum ($P < 10^{-3}$ Torr) ist die Expansion des Strahles unabhängig vom Umgebungsdruck. Im Feinvakuum ($P > 10^{-3}$ Torr), beobachtet man ähnliche Erscheinungen, wie sie schon für hohe Drucke bekannt sind. Z. B. obere Zeile Mitte: glockenförmige Expansion mit Verdichtungsstoß entlang der Strahlgrenze wie bei Pulvergasen hinter Geschützrohren; unten rechts: periodischer Strahl.

d) Kritik der Methode.

Es muß geprüft werden, ob die angelegte Hochfrequenzspannung die Ausbreitung des Dampfes wesentlich beeinflusst. Als Maß hierfür wurde die mittlere Verschiebung der Ionen durch das elektrische Wechselfeld berechnet. Unter extremen Bedingungen werden die Ionen jedoch nur 3 mm seitwärts verschoben. Auch experimentell konnte keine Deformation des Strahles durch das elektrische Feld festgestellt werden. Versuche, bei denen sowohl die geometrische Anordnung der Elektroden als auch die Frequenz und die Spannung in weiten Grenzen variiert wurden, ergaben

¹ Es gelingt nur bei Kühlung des Beobachtungsraumes mit fester Kohlensäure, anstatt mit Wasser oder Eis, die Umgebung des Strahles vollständig dunkel zu halten. Daraus läßt sich der Druck im leuchtenden Dampfsaum auf etwa 10^{-3} Torr abschätzen.

Um den richtigen Wert zu ermitteln, wurde eine zweidimensionale Quecksilberdampfströmung erzeugt. Die Aufnahmen der Strömungsbilder bei verschiedenen Umgebungsdrücken decken sich mit berechneten Strömungsbildern, die mit dem Adiabatenexponenten $\kappa = 1,67$ erhalten wurden (Abb. 12). Man muß daraus auf Übersättigung des Dampfes schließen.

g) Grenzen für die Gasdynamik bei tiefen Drücken.

Bei sehr niedrigen Drücken in der Umgebung des Strahles wird die mittlere, freie Weglänge so groß, daß die Gasdynamik als Kontinuumstheorie nicht mehr angewendet werden kann. Vielmehr muß die Ausbreitung der Dampfmoleküle mit Hilfe der kinetischen Gastheorie verfolgt werden. Die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Gasdynamik kann nur unter Berücksichtigung der Abmessungen der Apparatur gestellt werden, denn bei Vergrößerung aller Linearabmessungen der Strömung im Verhältnis zur freien Weglänge ist die Gasdynamik auch bei niedrigen Drücken anwendbar. Als Kriterium in einem bestimmten Falle wurde die Erzeugung eines MACHschen Kegels an einem dünnen Draht von 0,1 mm Durchmesser untersucht, der durch den Strahl bewegt wird. An einer genau definierten Stelle am Rand des Strahles entsteht dann ein MACHscher Kegel. Die freie Weglänge verglichen mit dem Drahtdurchmesser ist hier gerade hinreichend klein, um eine kleine Störung im Sinne der Gasdynamik auf den Dampf zu übertragen.

h) Verdichtungsstöße.

Nachdem der Treibdampf im Mischraum sehr weitgehend expandiert ist und dabei hohe Überschallgeschwindigkeit angenommen hat, tritt er in die Staudüse ein, wo unter Geschwindigkeitsverlust der Druckanstieg auf den Vorvakuumdruck erfolgt. Die Gasdynamik lehrt, daß ein solcher Übergang unstetig über einen geraden Verdichtungsstoß erfolgt. Außerdem entstehen schräge Verdichtungsstöße beim Eintritt in die Staudüse, weil der Dampf unter einem endlichen Winkel gegen die Staudüsenwand strömt. Bei der Charakteristikenmethode machen sich diese Verdichtungsstöße dadurch bemerkbar, daß Verdichtungslinien, die von der Staudüsenwand ausgehen, zusammenlaufen.

In Abb. 13 sind schräge und gerade Stöße unmittelbar zu erkennen.

Vorgänge in der Staudüse und Vorvakuumfestigkeit.

Abb. 14 zeigt die Wirkung des Verdichtungsstoßes, der bei Eintritt des Strahles in die Staudüse durch steiles Auftreffen der Strömung auf die Staudüsenwand entsteht. In dem Raum zwischen Verdichtungsstoß und Wand steht der im Stoß abgebremste Dampf unter hohem

Druck, so daß eine starke Rückströmung in das Hochvakuum erfolgt. Hiervon wird also der äußere Strahlmantel betroffen. Dringt die zu fördernde

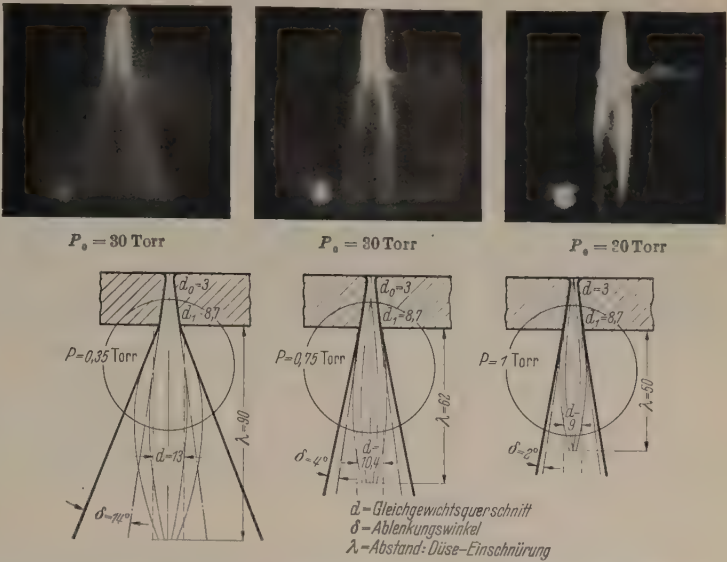


Abb. 12. Quecksilberdampfstrahl (rechteckiger Querschnitt) bei verschiedenen Umgebungsdrücken P . Die Kreise geben den Bildausschnitt an. Der Ablenkungswinkel δ wird nach der PRANDTL-MEYER-Lösung berechnet, die Wellenlänge λ durch einmalige Reflexion einer MACH-Linie am Strahlrand bestimmt. Der Gleichgewichtsdurchmesser d ergibt sich aus der Expansion auf den Umgebungsdruck P .



Abb. 13. Verdichtungsstöße durch Ablenkung von Überschallstrahlen. a) Ein Überschallstrahl mit Rechteckquerschnitt wird durch ein gekrümmtes Blech begrenzt, das Verdichtungsstellen erzeugt. Diese vereinigen sich in einem schrägen Stoß (s. auch Abb. 7). — b) Ein Überschallstrahl mit Kreisquerschnitt wird durch einen kegelförmigen Leitkörper abgelenkt. Hierdurch entsteht ein ringförmiger, schräger Stoß. — c) Ein Überschallstrahl strömt gegen ein senkrecht zu seiner Strömungsrichtung gestelltes Blech. Über einen geraden Verdichtungsstoß wird der Dampf stark komprimiert und strömt aus dem Raum zwischen Stoß und Wand in radialer Richtung ab.

Luft nur bis zu einer geringen Schichtdicke in den Strahl ein, so wird nur ein kleiner Bruchteil tatsächlich abgepumpt. Die Sauggeschwindigkeit ist da-

her nur gering. Nur bei größerer Eindringtiefe, die durch Herabsetzen der Dampfdichte erreicht wird, erzielt man eine große Sauggeschwindigkeit.

Das Zurückströmen des Dampfes kann man in einem begrenzten Ansaugdruckbereich wirksam herab-

niedrigen Strahldruck im Mischraum auf den Vorvakuumdruck. Dieser Vorgang ist in Abb. 15 schematisch dargestellt. Die Kurve zeigt die Abhängigkeit des Hochvakuums vom Vorvakuum. Hierbei ist angenommen, daß der Vorvakuumdruck, ausgehend von sehr niedrigen Werten, durch Lufteinlaß auf der Vorvakuumseite allmählich gesteigert wird. Hierdurch wird zunächst das Hochvakuum nicht beeinflusst. Wird jedoch ein kritischer Wert — die Vorvakuumfestigkeit — überschritten, so steigt der Druck auf der Hochvakuumseite plötzlich an. Bei sehr niedrigem Vorvakuumdruck ist nur ein kleiner Druckanstieg in der Staudüse erforderlich. Er erfolgt adiabatisch ohne Stoß. Beim Überschreiten eines bestimmten Vorvakuumdruckes entsteht ein Verdichtungsstoß¹, der bei weiterer Drucksteigerung stromaufwärts wandert. Dies wurde in der Anordnung nach Abb. 14 beobachtet.

Die gleiche Beobachtung machte DAYTON [7]. Im Mischraum bleibt die Strömung hiervon unbeeinflusst. Der kritische Vorvakuumwert, der Vorvakuumfestigkeit heißt, wird überschritten, wenn der Verdichtungsstoß soweit stromaufwärts gewandert ist, daß zwischen Vorvakuum und Hochvakuum eine Verbindung entsteht. Dann strömt die Luft aus dem Vorvakuum in das Hochvakuum, so daß der Druck in beiden Räumen nahezu gleich groß wird. Dementsprechend expandiert der Strahl nur noch sehr wenig und erreicht die Staudüsenwand nicht mehr².

Man kann den Vorvakuumdruck praktisch mit dem Ruhedruck hinter dem Verdichtungsstoß gleichsetzen. Abb. 8 gibt daher das Verhältnis von Vorvakuumdruck zu Druck im Siedegefäß in Abhängigkeit von der Expansion des Dampfes kurz vor dem Verdichtungsstoß wieder. In der Staudüse bildet sich bei gegebenem Vorvakuumdruck gerade an der Stelle ein Verdichtungsstoß, wo die Expansion auf Grund des Zusammenhanges in Abb. 8 auf den Vorvakuumdruck führt. Da der Dampf in der gekühlten Staudüse mit wachsender Entfernung von der Treibdüse stärker expandiert, ist hierdurch das beobachtete Wandern des Stoßes bei verändertem Vorvakuumdruck erklärt. Es ergibt sich weiterhin, daß ein Verdichtungsstoß in der Staudüse nur in einem bestimmten Vorvakuumdruckbereich existiert, nämlich dann, wenn der Vorvakuumdruck größer ist als es der stärksten Expansion am Ausgang der Staudüse und kleiner als der kleinsten Expansion am Eintritt entspricht. Interessant für die Pumpwirkung ist nur der letzte Fall, der genau die Vorvakuumfestigkeit definiert. Man erkennt auch den Grund für die häufig beobachtete Tatsache, daß engere Staudüsen eine bessere Vorvakuumfestigkeit ergeben, weil nämlich hierdurch die Expansion des Strahles beim Eintritt in die Staudüse vermindert wird.

¹ Der Drucksprung wurde mit einer Sonde quantitativ nachgewiesen, siehe IV. Mitteilung, Abbildung 10 und Abbildung 12.

² Siehe auch Strömungskonstruktionen und Strömungsbilder Mitteilung III.

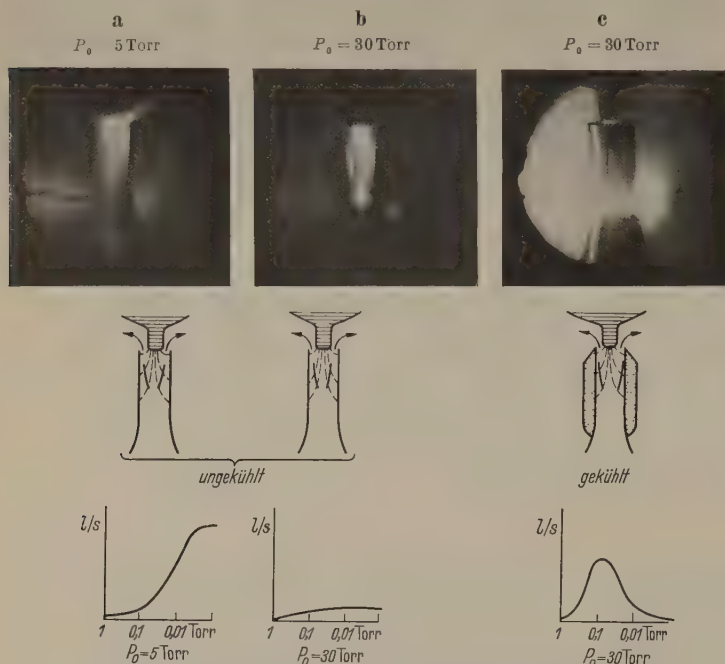


Abb. 14. Eintritt des Treibstrahles in die Staudüse (Glasrohr als Staudüse).
a) Aus dem Raum zwischen Verdichtungsstoß und ungekühlter Staudüse strömt Quecksilberdampf zurück. Da jedoch die Dichte im Treibdampf bei $P_0 = 5$ Torr hinreichend niedrig ist und die Luft tief eindringt, ist die Sauggeschwindigkeit trotzdem groß.
b) Bei $P_0 = 30$ Torr ist die Dichte im Strahl so groß, daß die Luft nur in die rückströmende äußere Schicht eindringt, daher ist die Sauggeschwindigkeit niedrig.
c) Durch Kühlung der Staudüsenwand erreicht man auch bei kleiner Eindringtiefe in einem gewissen Ansaugdruckbereich große Sauggeschwindigkeit. Dies beruht auf der „Absaugung“ der rückströmenden Grenzschicht.

setzen, indem man die Staudüsenwand kühlt und den Dampf kondensiert. Man saugt hierdurch die zurückströmende Grenzschicht zwischen Dampfstrahl und Staudüsenwand ab und erreicht bei hohen Dampfdichten im Strahle eine gute Sauggeschwindigkeit im Bereich

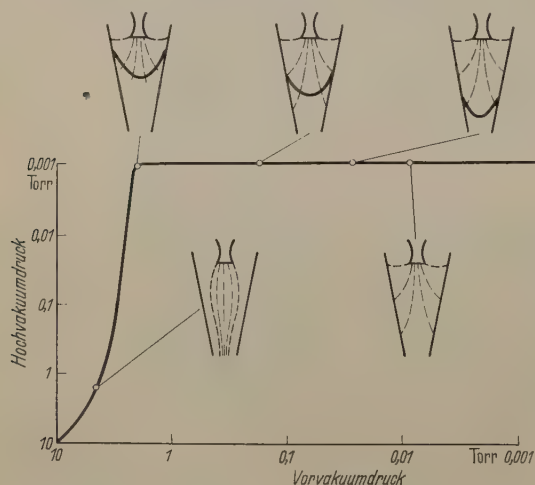


Abb. 15. Verdichtungsstoß in der Staudüse und Vorvakuumfestigkeit.

hoher Ansaugdrucke, da in diesem Druckbereich der Treibstrahl durch die umgebende Luft zusammengehalten wird und nahezu parallel zur Staudüsenwand strömt.

Außer diesen unerwünschten Eintrittseffekten erfolgt in der Staudüse der erwünschte Druckanstieg vom

Zusammenfassung.

Nach einem kurzen historischen Überblick wird auf zwei Fragestellungen hingewiesen, deren Behandlung zu einem umfassenden Verständnis der Vorgänge führt.

In dieser ersten Mitteilung werden als erste Fragestellung die Strömungseigenschaften des Treibstrahles in Mischraum und Staudüse sowohl experimentell durch Sichtbarmachen von Quecksilberdampf in einer Gasentladung als auch rechnerisch durch gasdynamische Methoden beschrieben. Die Ausbreitung des Treibstrahles im Mischraum wird im Feinvakuum, jedoch nicht im Hochvakuum vom Ansaugdruck beeinflusst. Es wird gezeigt, daß der Druckanstieg in der Staudüse durch einen Verdichtungsstoß erfolgt. Hierdurch werden die Vorgänge in der Pumpe bei vorvakuumseitigem Lufteinlaß quantitativ verständlich.

In der zweiten Mitteilung, die die Durchmischung von Luft und Treibdampf als zweite Fragestellung behandelt, soll dann gezeigt werden, daß die Kenntnis von Strömung und Durchmischung zusammen ein so weitgehendes Verständnis der Vorgänge ermöglichen,

daß auch die Sauggeschwindigkeitskurve daraus hervorgeht.

Literatur. [1] GAEDE, W.: Ann. Phys. 46, 357 (1915). — [2] LANGMUIR, J.: Phys. Rev. 8, 48 (1916). — [3] CRAWFORD, W. W.: Phys. Rev. 10, 557 (1917). — [4] COPLEY, M. J. O. C. u. H. M. SIMPSON: Tenney u. T. T. Phipps: Revscient. — [5] GAEDE, W.: Z. techn. Phys. 4, 337 (1923). — [6] JAECKEL, R.: Naturforsch. 2a, 666 (1947). — [7] DAYTON, B. B.: Rev. Sci. Instr. 19, 793 (1948). — [8] MATRICON, M.: J. Phys. Rab. 3, 127 (1932). — [9] PRANDTL, L.: Vieweg, Braunschweig, 1944. — [10] BUSEMANN, A.: Handb. d. Experimentalphys. IV 1. „Gasdynamik“. — [11] SAUER, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik, Springer, Berlin, 1951. — [12] OSWATITSCH, K.: Gasdynamik, Springer, Wien, 1952. — [13] STARK, J. u. M. REICH: Phys. Z. 11, 321 (1903). — [14] JAECKEL, R. u. H. G. NÖLLER: Phys. Verh. 6, 103 (1950). — [15] NÖLLER, H. G.: Diss. Bonn (1951). — [16] JAECKEL, R., H. G. NÖLLER u. H. KUTSCHER: Phys. 4, 209 (1953). — [17] KLUMB, H., E. ROBENS u. O. SCHOLZ: Naturwiss. 40, 6, 196 (1953). — [18] FOLSOM, R. G.: Chem. Engng. Progr. 48, 542 (1952). — [19] JAECKEL, R., H. G. NÖLLER u. H. KUTSCHER: Vak. techn. 3, 1 (1954).

Dr. HANS-GEORG NÖLLER,

Hochvakuum-Laboratorium E. Leybold's Nachfolger, Köln.

Die physikalischen Vorgänge in Diffusions- und Dampfstrahl-Pumpen.

II. Die Durchmischung von Luft und Treibdampf und die Sauggeschwindigkeit.

VON HANS-GEORG NÖLLER.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 18. September 1954.)

In Diffusions- und Dampfstrahlpumpen ist die Durchdringung des Treibstrahles mit der abgesaugten Luft von entscheidender Bedeutung für eine gute Pumpleistung. Daher soll dieser Vorgang im folgenden eingehend untersucht werden. Die berechnete Eindringtiefe der Luft führt unter Berücksichtigung der Strömungseigenschaften des Treibstrahles zum Verständnis aller bekannten Sauggeschwindigkeitseigenschaften der Pumpen in dem Ansaugdruckbereich von etwa 5 Torr und darunter¹.

Definition einer Trennfläche zwischen Strahl und umgebender Luft.

Es empfiehlt sich, eine Trennfläche zur Festlegung des Koordinatensystems zu definieren. Für höhere Ansaugdrucke, bei denen die mittlere freie Weglänge wesentlich kleiner als die Pumpendimensionen ist, dient hierzu die Strahlgrenze, wie sie sich durch gasdynamische Berechnung bei dem jeweiligen Ansaugdruck (Druck in der Umgebung des Strahles) ergibt [1]. Charakteristisch für den Arbeitsbereich der Hochvakuumdiffusionspumpen also für niedrige Ansaugdrucke (10^{-3} bis 10^{-7} Torr) ist die Schwierigkeit einer exakten Definition der Trennfläche. Die Definition für höhere Drucke versagt hier allein schon deshalb, weil der Strahl nach der gasdynamischen Rechnung im Vakuum um mehr als 180° umkehren kann [1 Abb. 5].

¹ Zum Verständnis der Vorvakuumseigenschaften reicht im Wesentlichen die Kenntnis der Treibstrahlströmung ohne Berücksichtigung des Mischungsmechanismus aus. In den folgenden Ausführungen müssen aber sowohl die Strömung als auch die Durchmischung berücksichtigt werden. Daher sei auf die erste Mitteilung hingewiesen, in der die Strömung des Treibstrahles und die Vorvakuumseigenschaften beschrieben wurden [1].

Außerdem würde jedoch an solcher Trennfläche wegen des geringen Druckes und der damit verbundenen großen, mittleren, freien Weglänge keine gegenseitige Beeinflussung von Luft und Treibdampf stattfinden können, d. h., die für den Pumpvorgang wesentlichen Zusammenstöße finden weiter im Inneren des Strahles statt, wo der Dampfdruck höher ist. Es empfiehlt sich daher, die Trennfläche dorthin zu legen, wo gerade noch zahlreiche Zusammenstöße erfolgen. Hiermit ist im Wesentlichen auch diejenige Fläche gekennzeichnet, die das Gebiet des Strahles begrenzt, das den gasdynamischen Kontinuumsgesetzen folgt oder auch diejenige Fläche die die Treibdampf-moleküle mit ihrer jeweiligen thermischen Geschwindigkeit geradlinig ohne weitere Zusammenstöße verlassen.

Zur Abschätzung der Drucke auf dieser Fläche sei an zahlreiche Molekularstrahlversuche erinnert, bei denen der maximale Druck im „Ofen“ durch die Bedingung gegeben war, daß die mittlere, freie Weglänge des Dampfes im Ofen etwa ein Zehntel der Linearabmessungen des „Ofenspaltes“ betragen durfte [2].

Als Trennfläche bei niedrigen Ansaugdrucke sei daher diejenige Charakteristikenfläche definiert, auf der die mittlere, freie Weglänge ein Zehntel des Abstandes Treibdüse Wand beträgt.

Masse- und Impulstransport durch die Trennfläche.

Durch die Trennfläche diffundieren sowohl Luft-moleküle in den Treibstrahl, als auch Treibdampf-moleküle in die Luft. Außer der Diffusion, die den Kernpunkt der folgenden Untersuchung bilden wird, interessiert hier noch der Impulstransport, der sich als Reibung äußert.

Es sei $j_d = D \frac{dn_d}{dx}$ die Teilchenstromdichte der Treibdampf-moleküle (Teilchendichte n_d) durch die Trennfläche und

$$j_g = D \frac{dn_g}{dx}$$

die entgegengerichtete Stromdichte der Luftmoleküle. Bemerkenswert ist, daß nach ENSKOG [3] der Diffusionskoeffizient unabhängig vom Mischungsverhältnis $\frac{n_d}{n_g}$ und umgekehrt proportional der Gesamtdichte $n_d + n_g = n$, oder auch (bei konstanter Temperatur) dem Totaldruck P ist.

$$D = \frac{D_0}{P}. \quad (1)$$

Es gilt immer

$$n_d + n_g = n = \text{const}; \quad j_d + j_g = 0$$

speziell also z. B. auf der Trennfläche

$$n_d = n_g = \frac{n}{2}.$$

Es handelt sich nun zunächst darum, die Abbremsung der Treibdampfgeschwindigkeit v beispielsweise an der Stelle der Trennfläche (v_0) abzuschätzen. Hierzu diene die Feststellung, daß der Diffusionsstrom $j_d = j_0$ der Dampf-moleküle (Masse m_d) einen Impuls $j_0 \cdot v_0 \cdot m_d$ durch die Trennfläche hindurch transportiert, der an die als ruhend gedachte Luft abgegeben wird und hierdurch auf die Luft als Schubspannung

$$\tau_g = j_0 v_0 m_d$$

wirkt. Entsprechend transportiert der entgegengesetzt gerichtete, dem Betrage nach jedoch gleiche Diffusionsstrom der Luft (Masse m_g) den Impuls $j_0 v_0 m_g$. Die Luftmoleküle werden hierbei auf die Dampfgeschwindigkeit v beschleunigt, was einer auf den Dampf abbremsend wirkenden Schubspannung

$$\tau_d = j_0 (v - v_0) m_g$$

entspricht. Die an der Trennfläche angreifenden Schubspannungen sind den Beträgen nach gleich und daraus ergibt sich,

$$v_0 = v \frac{1}{\frac{m_g}{m_d} + 1}$$

für $\frac{m_g}{m_d} = 1$ wird $v_0 = \frac{1}{2} v$ wie zu erwarten. Bei dem tatsächlich auftretenden Wert $\frac{m_g}{m_d} \approx 0,1$ ergibt sich ein Geschwindigkeitsverlust am Strahlrand von nur 10%¹.

Es erhebt sich weiter die Frage, ob eine derartige laminare Grenzschicht unter den gegebenen Umständen stabil ist oder durch Turbulenz zerfällt. Ein Kriterium für die Stabilität ist die REYNOLDSSche Zahl Re , gebildet aus Grenzschichtdicke δ , Dampfgeschwindigkeit v und kinematischer Zähigkeit ν . Setzt man nach BLASIUS [7] als Grenzschichtdicke

$$\delta = 3 \sqrt{\frac{\nu l}{v}},$$

so erhält man

$$Re = 3 \sqrt{\frac{l \cdot v}{\nu}} \quad (2)$$

(l = Länge des Strahles).

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} l &= 10 \text{ cm}; & \nu_{(1 \text{ Torr})} &= 10 \text{ cm}^2/\text{s} \\ v &= 2 \cdot 10^4 \text{ cm/s} \\ Re &= 140 \end{aligned}$$

Turbulenz tritt jedoch nur bei $Re > 2000$ auf, so daß hier mit laminarer Grenzschicht gerechnet werden muß.

Als stabilisierende Faktoren treten die fast stets während der Mischung auftretende Expansion des Treibstrahles und die hohe Überschallgeschwindigkeit bei kleiner REYNOLDSScher Zahl hinzu [4].

Eindringtiefe der Luft und Sauggeschwindigkeit.

Unter Voraussetzung laminarer Strömung kann nunmehr die Durchmischung der abgesaugten Luft mit dem Treibstrahl durch Diffusion beschrieben werden. Hierzu diene das vereinfachte Modell eines Treibstrahles mit konstanter Dichte, dessen Trennfläche gegenüber der Luft eben sei. Zur Berechnung sei eine X-Achse senkrecht zur Trennfläche (mit positiver Richtung in den Dampfstrom hinein) und eine Y-Achse parallel zur Trennfläche in Richtung der Strahlgeschwindigkeit gelegt. Der Nullpunkt des koordinaten Systems befinde sich an der Treibdüsenmündung. Die Diffusion der Luft in den Strahl wird durch die zeitabhängige Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n_g}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_g}{\partial x^2}$$

beschrieben, wobei n_g die Teilchendichte der Luft-moleküle und D den Diffusionskoeffizienten darstellt. Auf der Trennfläche kann stets eine konstante Dichte

$$n_{g(x=0)} = n_0$$

angenommen werden. Bei der Definition der Trennfläche für hohe Drucke, wie sie oben gegeben wurde, erfolgt die gegenseitige Durchdringung von Luft und Treibdampf symmetrisch zur Trennfläche, so daß hier stets gilt

$$n_{g(x=0)} = n_0 = \frac{n}{2}$$

(n = Dichte der Luft beim Ansaugdruck). Bei niedrigen Drucken (Hochvakuum) und der hierfür gegebenen Definition der Trennfläche ist jedoch zu setzen

$$n_{g(x=0)} = n_0 = n.$$

Nimmt man als weitere Randbedingung

$$n_{g(x=\infty)} = 0$$

und als Anfangsbedingung

$$n_{g(t=0)} = 0$$

hinzu, so ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} n_g &= n_0 \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right) \\ \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

¹ In Wirklichkeit ist der Verlust noch geringer, da die Luft im Mischraum nicht in Ruhe bleibt, sondern mit dem Strahl strömt.

mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich eine Eindringtiefe δ der Luft durch

$$n_g(\delta, t) = n_0 \cdot 0,4$$

festsetzen. Da

$$1 - \Phi_{(0,6)} = 0,4$$

ergibt sich

$$\delta = 0,6 \sqrt{4 D t}.$$

Eliminiert man die Zeit t durch den Abstand von der Treibdüse y und die Dampfgeschwindigkeit v und setzt

$$D = \frac{D_0}{P}, \quad (1)$$

so wird schließlich

$$\delta = 1,2 \sqrt{\frac{D_0}{v} \frac{y}{P}} \quad (6)$$

$$n_g = n_0 \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{2 \sqrt{\frac{D_0}{v} \frac{y}{P}}} \right) \right). \quad (7)$$

Außerdem läßt sich mit der Lösung der Differentialgleichung $n_g(x, y)$ auch ein Ausdruck für die Sauggeschwindigkeit s bilden.

$$S = v \cdot b \cdot (s - r) \frac{\bar{n}_g}{n}$$

b ist die Breite des Strahles (z. B. der Umfang eines zylindrischen Strahles) $s - r$ die Tiefe des Streifens innerhalb des Strahles, in dem sich Luftmoleküle befinden, die von dem Strahl in den Vorvakuumraum befördert werden (Abb. 1).

r darf nicht allgemein gleich Null gesetzt werden, da fast immer die äußeren Randgebiete des Strahles in den Vakuumraum zurückgeblasen werden. s ist die durch die Abmessung des Strahles gegebene maximale Eindringtiefe. In der Gleichung bedeutet

$$v \cdot b \cdot (s - r)$$

das abgesaugte Volumen. Dieses ist jedoch nur mit dem Bruchteile

$$\frac{\bar{n}_g}{n} = \frac{1}{n(s-r)} \int_r^s n_g dx$$

mit Luftmolekülen ausgefüllt. Für die Sauggeschwindigkeit ergibt sich somit

$$S = v \cdot b \cdot \frac{1}{n} \int_r^s n_g(x, l) dx. \quad (8)$$

Diffusions- und Dampfstrahlpumpe.

Mit dieser Kenntnis vom Durchmischungsvorgang der abgesaugten Luft mit dem Treibstrahl, sowie der Kenntnis der Ausbreitung des Treibstrahles bei verschiedenen Umgebungsdrücken (Ansaugdrücken) [1] läßt sich nunmehr das Verhalten von Diffusions- und Dampfstrahlpumpen verstehen. Charakteristisch sind die Sauggeschwindigkeitskurven der beiden Pumpentypen (Abb. 2) während die Diffusionspumpe bei niedrigen Ansaugdrücken (Hochvakuum) eine große, vom Ansaugdruck nahezu unabhängige Sauggeschwindigkeit aufweist, die bei höheren Drücken steil abfällt, ergibt eine Dampfstrahlpumpe mit etwa gleichen Abmessungen bei höheren Drücken ein ziemlich scharfes Saugleistungsmaximum von nur verhältnismäßig geringer Höhe. Dieser Unterschied beruht im Wesentlichen auf dem unterschiedlichen Druck im Treib-

dampfstrahl. Man kann daher auch grundsätzlich eine Dampfstrahlpumpe durch Herabsetzen der Heizleistung und damit Verringerung der Treibdampfichte als Diffusionspumpe betreiben. Zur Erläuterung dienen die schematischen Darstellungen der Zustände in der Pumpe in Abb. 2.

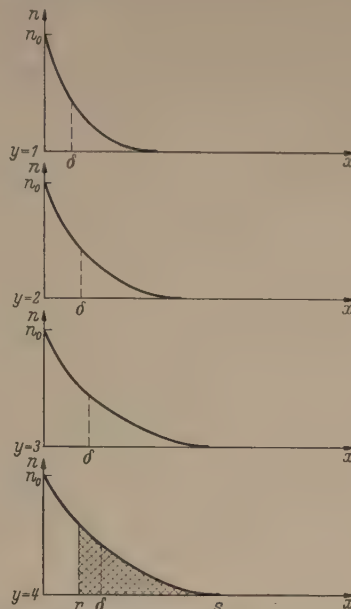


Abb. 1. Eindringen der Luft in den Dampfstrahl. $n_g = n_0 [1 - \Phi(x)]$ für vier von oben nach unten zunehmende Werte y der Entfernung von der Treibdüse. Mit wachsender Entfernung y nimmt die Eindringtiefe δ zu. Die untere Kurve gilt für den größten Abstand $y = l$ von der Treibdüse, wo also der Treibstrahl in die

Staudüse eintritt. Die Fläche $\int_r^s n_g dx$ ist der Sauggeschwindigkeit proportional.

Da die äußere Schicht des Strahles (von $x = 0$ bis r) in das Hochvakuum zurückströmt [1], trägt die dort eingedrungene Luft nicht zur Sauggeschwindigkeit bei.

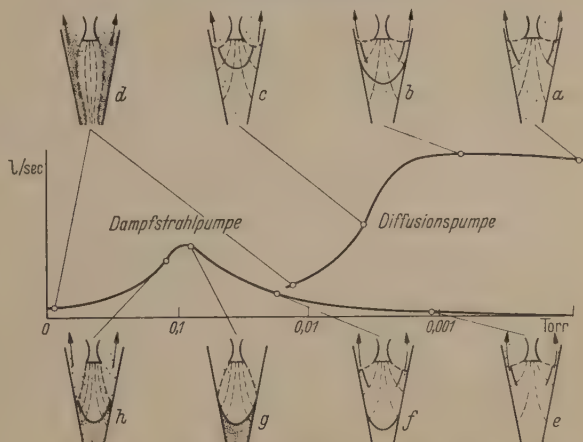


Abb. 2. Sauggeschwindigkeit und schematische Darstellung der Vorgänge in der Pumpe bei verschiedenen Ansaugdrücken für Dampfstrahl- und Diffusionspumpen. Durch die Punktdichte soll die Dichte der Luft angedeutet werden. Stromlinien sind gestrichelt, Verdichtungsstöße ausgezogen. Erklärung im Text.

1. Diffusionspumpe (Abb. 2 a, b, c, d).

a) Der hinreichend niedrige Druck im Treibstrahl, der jedoch noch wesentlich höher als der Ansaugdruck der abgepumpten Luft ist, läßt die Luft bis in das Innere des Strahles eindringen. An der Staudüsenwand entsteht beim Eintritt des Dampfstrahles in die Staudüse ein Verdichtungsstoß, hinter dem eine Rückströmung in das Hochvakuum erfolgt. Trotzdem wird die größte Menge der Luft, die bis ins Innere des Strahles eindringt, durch die Staudüse befördert. Daher erreicht man eine hohe Sauggeschwindigkeit.

b) Bei Erhöhung des Ansaugdruckes ändern sich die Verhältnisse in dem oberen Teil der Staudüse nicht. Auch jetzt dringt die Luft bis ins Innere des Strahles ein und wird zum größten Teil durch die Staudüse in das Vorvakuum befördert. Der Strahl selbst bleibt wegen des immer noch geringen Ansaugdruckes von der umgebenden Luft praktisch unbeeinflusst. Die Menge der abgesaugten Luft ist jedoch angestiegen und in gleichem Maße auch der Druck im Vorvakuumraum. Der erforderliche, große Druckanstieg des Strahles erfolgt bekanntlich über einem Verdichtungsstoß [1 Abb 15].

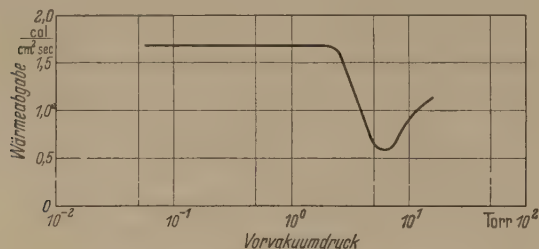


Abb. 3. Wärmeabgabe von kondensierendem Treibmittel an die gekühlte Staudüse einer Dampfstrahlpumpe in Abhängigkeit vom Vorvakuumdruck. Bei 2 Torr (Vorvakuumfestigkeit) wird der Strahl so stark zusammengedrückt (Abb. 2d), daß er die Wand nicht mehr berührt und daher die Kondensation schwächer wird. Der Wiederanstieg bei 7 Torr kann durch Aufstau von Kondensat in der Staudüse erklärt werden.

c) Bei weiterer Erhöhung des Ansaugdruckes schiebt sich der gerade Verdichtungsstoß wegen des noch größeren Druckanstieges stromaufwärts bis er die Staudüsenwand nicht mehr erreicht. Zwischen dem Verdichtungsstoß und der Staudüsenwand strömen größere Luftmengen in das Hochvakuum zurück, so daß die Sauggeschwindigkeit stark abfällt. Als Nebenerscheinung beobachtet man bei höherem Umgebungsdruck eine geringere Expansion des Strahles hinter der Treibdüse.

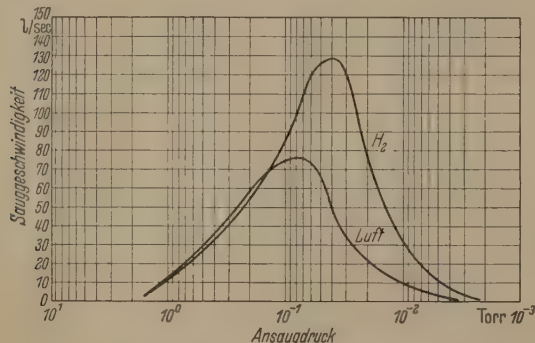


Abb. 4. Sauggeschwindigkeit einer Dampfstrahlpumpe für Luft und Wasserstoff.

d) Schließlich hört bei noch höherem Ansaugdruck die Pumpwirkung ganz auf, so daß zwischen Hochvakuum und Vorvakuum kein wesentlicher Druckunterschied mehr herrscht. Auf Grund des hohen Umgebungsdruckes kann der Strahl nur noch wenig expandieren und strömt mit großem Abstand von der Staudüsenwand durch die Staudüse. Die von dem Strahl beförderte Luft tritt durch den Zwischenraum ungehindert in das Hochvakuum zurück. Die Sauggeschwindigkeit ist auf den Wert der Vorpumpe abgefallen.

2. Dampfstrahlpumpe (Abb. 2e, f, g, h, d).

Der Druck des Dampfes im Strahl ist wesentlich höher als bei der Diffusionspumpe. Daher dringt die

Luft nach Gleichung (6) und (7) nur bis zu einer bestimmten Eindringtiefe in den Strahl ein. Die Sauggeschwindigkeit ist also kleiner als bei der Diffusionspumpe.

e) Die Randpartien des Strahles werden besonders stark bei niedrigen Ansaugdruck, wo der Strahl stark divergiert, in das Hochvakuum zurückgeblasen, so daß nur sehr wenig Luft durch die Staudüse befördert wird. [1 Abb. 14]. Die Sauggeschwindigkeit bei niedrigen Ansaugdruck ist daher sehr klein.

f) Bei genügender Steigerung des Ansaugdruckes wird jedoch die Expansion des Strahles in den Randgebieten wegen des höheren Umgebungsdruckes begrenzt, so daß die äußeren Stromlinien die Wand unter einem spitzeren Winkel treffen. Daher wird weniger Dampf in den Hochvakuumraum zurückgeblasen und ein größerer Bruchteil der in den Strahl diffundierten Luft in das Vorvakuum gefördert. Gleichzeitig steigt der Vorvakuumdruck an und es entsteht ein gerader Verdichtungsstoß, der den Druckanstieg vermittelt.

g) Bei weiterer Steigerung des Ansaugdruckes wird der Strahl noch schlanker, so daß er nahezu parallel auf die Staudüsenwand auftritt und nur noch sehr wenig Rückströmung erfolgt. Die Sauggeschwindigkeit hat ihren Maximalwert erreicht. Der Verdichtungsstoß ist wegen des hohen Vorvakuumdruckes stromaufwärts gewandert.

h) Das Maximum der Sauggeschwindigkeit wird überschritten, wenn bei weiterer Steigerung des Ansaugdruckes der Verdichtungsstoß soweit stromaufwärts wandert, daß er die Staudüsenwand nicht mehr erreicht und Luft aus dem Vorvakuum in das Hochvakuum zurückzuströmen beginnt.

d) Hierdurch gleichen sich, ähnlich wie bei der Diffusionspumpe, Hochvakuum- und Vorvakuumdruck an, und der Dampfstrahl strömt bei hohem Umgebungsdruck durch die Staudüse, ohne die Wand noch zu berühren. Die Sauggeschwindigkeit sinkt auf den Wert der Vorpumpe ab.

Den plötzlichen Umschlag der Strömungsform bei Überschreitung der Vorvakuumfestigkeit in Abb. 2d zeigt sehr eindrucksvoll ein Versuch, bei dem die Kondensationswärme an der gekühlten Staudüsenwand in Abhängigkeit vom Vorvakuumdruck gemessen wurde (Abb. 3.)

Diffusionspumpe und Dampfstrahlpumpe stellen Extremfälle dar, zwischen denen die sogenannten Treibdampfumpen (Booster) bekannt sind. Diese weisen ein Saugleistungsmaximum auf, das im Bereich um etwa 10^{-2} Torr liegt. Im Unterschied zu den Dampfstrahlpumpen fällt die Sauggeschwindigkeit nach niedrigen Drucken jedoch nicht so steil ab, sondern weist auch hier noch bis in das Hochvakuumgebiet hinein, endliche Werte auf. Die Arbeitsweise ergibt sich aus dem Gesagten durch die höhere Eindringtiefe bei kleinerem Treibdampfdruck. Als weiteres Anwendungsbeispiel der Gleichungen (6), (7), (8) sei die Absaugung von Wasserstoff mit einer Dampfstrahlpumpe diskutiert. Abb. 4 zeigt die Sauggeschwindigkeitskurven für Wasserstoff und Luft. Im Maximum ist das Verhältnis der Sauggeschwindigkeiten etwa 1 : 2, nach niedrigeren Drucken ist die Sauggeschwindigkeit für Wasserstoff jedoch wesentlich höher. Nach Gleichung (6) und (7) wächst die Eindringtiefe für Wasserstoff mit der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Diffusionskoeffizienten von Wasserstoff und

luft. Nach ENSKOG [3] ist dieser Wert 2,1 in Übereinstimmung mit dem Verhältnis der Sauggeschwindigkeiten im Maximum. Bei niedrigeren Ansaugdrücken wirkt sich die größere Eindringtiefe für Wasserstoff wesentlich stärker aus, da die äußeren Strahlpartien in das Hochvakuum zurückströmen.

Allgemeine Gleichung für die Sauggeschwindigkeit.

Gleichung (8) gilt für die Sauggeschwindigkeit S innerhalb des Treibstrahles. Ausnutzbar ist jedoch nur die an dem Anschlußquerschnitt der Pumpe wirksame Sauggeschwindigkeit S' . Diese wird durch den Strömungswiderstand W begrenzt, den die oben definierte Trennfläche oder andere Blenden zwischen Strahl und Anschlußquerschnitt darstellen. Meistens ist die Ringfläche F zwischen Treibdüse und Pumpengehäuse bestimmend. Die Sauggeschwindigkeit wird außerdem durch das Endvakuum vermindert. Der Druck bei Endvakuum sei in den Anteil durch Gasabgabe P_g von Wänden und Treibmittel und durch Rückdiffusion aus dem Vorvakuum

$$P_r = P_v e^{-\frac{v \cdot L}{D}}$$

aufgeteilt. Die allgemeine Gleichung für die Sauggeschwindigkeit lautet dann:

$$S' = \frac{1}{\frac{1}{S} + W} \left(1 - \frac{P_g + P_v e^{-\frac{v \cdot L}{D}}}{P} \right). \tag{9}$$

a) Im Fall der Dampfstrahlpumpe ist S wegen der geringen Eindringtiefe so klein, daß W gegenüber $1/S$ vernachlässigt werden kann. Auch die Rückdiffusion aus dem Vorvakuum ist gegenüber der Gasabgabe gering. Daher geht Gl. (9) in die um den Endvakuum-Einfluß erweiterte Gl. (8) über.

$$S' = v \cdot b \cdot \frac{1}{n} \int_r^n n_g dx \left(1 - \frac{P_g}{P} \right). \tag{10}$$

b) Im Fall der Diffusionspumpe wird einerseits im Hochvakuum

$$W = \frac{4}{\bar{c} \cdot F}$$

(\bar{c} = mittlere thermische Geschwindigkeit) und andererseits findet praktisch vollständige Durchmischung von Luft und Treibdampf statt. Gl. (8) läßt sich daher zu

$$S = v \cdot F_t$$

vereinfachen. (F_t = Strahlquerschnitt). Hiermit geht die allgemeine Gl. (9) über in

$$S' = \frac{\bar{c} F}{4} \frac{1 - \frac{P_g + P_v e^{-\frac{v \cdot L}{D}}}{P}}{1 + \frac{\bar{c}}{4v} \frac{F}{F_t}}. \tag{11}^1$$

Die Gleichungen (10) und (11) für die Sauggeschwindigkeit gelten für Ansaugdrücke, bei denen die Vorvakuumfestigkeit noch nicht überschritten ist (s. Abb. 2 a, b, e, f, g). Für höhere Drücke ist die Sauggeschwindigkeit angenähert umgekehrt proportional dem Ansaugdruck bis der Wert der Vorpumpe erreicht ist ².

Zusammenfassung.

Zunächst wird eine Trennfläche zwischen Treibstrahl und Luft im Mischraum definiert. Aufgrund der hohen kinematischen Zähigkeit im zugrunde liegenden Ansaugdruckbereich bleibt die Strömung laminar. Erst bei wesentlich höheren Drücken ist Turbulenz zu erwarten. Die Diffusion der Luft in den Strahl wird mathematisch beschrieben. Die Kenntnis des Durchmischungsvorganges unter Berücksichtigung der Ausbreitung des Treibstrahles, deren Behandlung in der ersten Mitteilung erfolgte, ermöglicht Vorstellungen, aus denen nicht nur der Verlauf der Saugleistungskurven für Dampfstrahl-, Diffusions- und Treibdampf-(Booster-)Pumpen folgt, sondern auch eine allgemeine Gleichung für die Sauggeschwindigkeit. Durch Spezialisierung für den Fall der Diffusionspumpe geht diese in eine früher von JAECKEL aufgrund von Modellvorstellungen abgeleitete Gleichung über.

Literatur. [1] NÖLLER, H. G.: Z. angew. Phys. 7, 218 (1955). — [2] ESTERMANN, W.: Rev. mod. Phys. 18, 3 (1946). — [3] ENSKOG, D.: Phys. Z. 12, 5, 33 (1911). — [4] OSWATITSCH, K.: Gasdynamik, Springer, Wien 1952. — [5] JAECKEL, R.: Naturforsch. 2 a, 666 (1947). — [6] JAECKEL, R.: Kleinste Drücke, ihre Messung und Erzeugung, Springer, Berlin, 1950. [7] BLASIUS, H.: Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56 (1908).

Dr. HANS-GEORG NÖLLER,
Hochvakuum-Laboratorium E. Leybold's Nachfolger, Köln.

¹ Für $F = F_t$ und $P_g = 0$ ist Gleichung (11) identisch mit einer von JAECKEL auf Grund einer Modellvorstellung abgeleiteten Gleichung [5].

² Unter bestimmten Voraussetzungen läßt sich bei höheren Ansaugdrücken ein erneuter Anstieg der Sauggeschwindigkeit erreichen. Über die Bedingungen, die die Vorvakuumfestigkeit bestimmen s. [1].

Die physikalischen Vorgänge in Diffusions- und Dampfstrahl-Pumpen.

III. Vergleich von beobachteten und theoretisch ermittelten Strömungsbildern.*

VON HORST KUTSCHER.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 16. September 1954.)

1. Problemstellung.

In Mitteilung I wurde bereits die Anwendbarkeit von gasdynamischen Konstruktionen auf Strömungsbilder, die durch Anregung von Quecksilberdampf erzeugt wurden, plausibel gemacht. In der vorliegenden Mitteilung III wird nun allgemein die Übereinstimmung

zwischen experimentellen Strömungsbildern und den dazugehörigen gasdynamischen Konstruktionen gezeigt und zwar durch Ausdehnung der Untersuchungen auf Öldampf einerseits und durch eingehendere Strömungskonstruktionen andererseits.

In Teil IV wird über direkte Druck- und Geschwindigkeitsmessungen in Überschallströmungen berichtet.

* Mitteilung III und IV: Dissertation Bonn 1954.

Zur experimentellen Untersuchung diente ein Öldampfstrahlsauger aus Glas, der im wesentlichen der Form entspricht, die in der Hochvakuumtechnik verwendet wird.

Im Folgenden wird bei der Beschreibung der Vorgänge der Einfachheit halber die Nomenklatur der Hochvakuumtechnik angewendet, obwohl die ermittelten Zusammenhänge keineswegs in ihrer Gültigkeit auf Pumpen beschränkt sind.

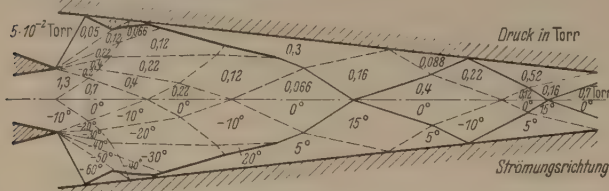


Abb. 1.1. Austritt der Strömung aus der Lavaldüse bei niedrigem Außendruck. Hochvakuumdruck: $5 \cdot 10^{-2}$ Torr; Vorvakuumdruck: 0,7 Torr.

Der niedrige äußere Gasdruck bedingt starke Ablenkung der Strömung beim Austritt aus der Lavaldüse und damit auch einen großen Winkel beim Auftreffen auf die Staudüsenwand. Dort wird ein gerader Stoß ausgelöst, hinter dem sich ein Druck von 1,1 Torr einstellt. Dieser Druck ist höher als der Vorvakuumdruck. Daher folgt die Expansion sowohl in den Hochvakuumraum (Mittellung I Abb. 14 und Mittellung II Gleichung (8)) als auch in Richtung Vorvakuum. In Strömungsrichtung bildet sich eine neue freie Strahlgrenze aus. Infolge des hohen Außendruckes von 1,1 Torr ist der Winkel zwischen Strahlgrenze und Staudüsenwand klein genug, so daß beim erneuten Auftreffen des Strahles auf die Staudüsenwand eine Ablenkung in Staudüsenrichtung über einen schrägen Stoß möglich ist, hinter dem sich ein Druck von 0,5 Torr einstellt. Der schräge Stoß läuft bis in den Strahlkern hinein und schließlich weiter, bis er wieder die Staudüsenwand erreicht. Dort wird er reflektiert. Die gleichen Erscheinungen wiederholen sich, bis am Ende der Staudüse der Vorvakuumdruck erreicht ist. Bei höherem Vorvakuumdruck bildet sich zunächst am Ende der Staudüse ein gerader Stoß, der mit weiter wachsendem Vorvakuumdruck in Richtung Treibdüse wandert bis der in Abb. 1.4 dargestellte Fall erreicht ist.

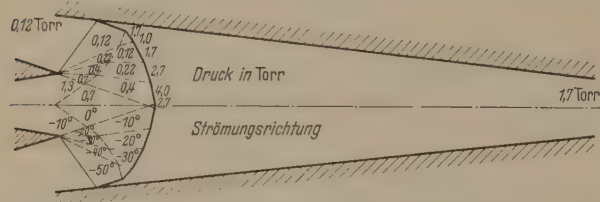


Abb. 1.2. Austritt der Strömung aus der Lavaldüse bei starkem äußerem Unterdruck (0,1 Torr) im Hochvakuumraum und hohem Vorvakuumdruck (1,7 Torr). Der Strahl trifft unter einem großen Winkel auf die Staudüsenwand. Es wird ein gerader Verdichtungsstoß ausgelöst, der sich bis in den Kern des Strahles fortsetzt, was aufgrund des hohen Vorvakuumdruckes möglich ist. Die Überschallströmung bricht somit bereits am Staudüsen-eingang ab. Es folgt Unterschallströmung bis zum Vorvakuumraum.

2. Kritische Betrachtung der theoretischen Methoden [1], [2], [9], [10], [11], [12].

a) Charakteristiken-Methode.

Wie bereits früher und in Mitteilung I festgestellt wurde [4], [5], [8], tritt in den Dampfstrahlpumpen Überschallgeschwindigkeit auf. Im Folgenden setzen wir zunächst versuchsweise voraus, daß die Gasdynamik im untersuchten Druckgebiet noch anwendbar sei. Bei einem Eingangsdurchmesser der Staudüse von 4 cm und Beschränkung der theoretischen Betrachtungen auf Drucke oberhalb $5 \cdot 10^{-2}$ Torr ist das plausibel, bedarf jedoch noch der experimentellen Bestätigung.

Unter dieser Voraussetzung ist der Druck p_d in der Dampfströmung an der Mündung der Lavaldüse gegeben durch den Druck p_0 im Siedegefäß und das Verhältnis von kleinstem Querschnitt F^* der Treibdüse zum Querschnitt F der Düsenmündung, und zwar gilt die bekannte Beziehung¹:

$$\frac{F^*}{F} = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa + 1}} \left(\frac{p_d}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_d}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right\}}. \quad (1)$$

¹ Für die verwendeten organischen Treibmittel ist $\kappa = 1,1$ zu setzen.

Daraus ergibt sich eine Geschwindigkeit der Dampfströmung w_d beim Austritt aus der Düse

$$w_d = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{R T_0}{M} \left\{ 1 - \left(\frac{p_d}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right\}}. \quad (2)$$

b) Verdichtungsstöße.

Es soll hier nochmals kurz auf die bereits in Mitteilung I erwähnten Verdichtungsstöße eingegangen werden, da sie bei der Ausführung der Charakteristikenkonstruktion berücksichtigt werden müssen.

Liegt die Stoßfront nahezu senkrecht zu den Stromlinien, so erfolgt der un stetige Druckanstieg in sogenannten „geraden Verdichtungsstößen“. Vor dem Stoß herrscht Überschallgeschwindigkeit w , danach die Unterschallgeschwindigkeit \hat{w} . Es gilt die Beziehung

$$w \hat{w} = c^2.$$

Das Druckverhältnis \hat{p}/p_0 vom Druck \hat{p} unmittelbar hinter dem Verdichtungsstoß zu Kesseldruck p_0 ist eindeutig gegeben durch das entsprechende Druckverhältnis p/p_0 vor dem Stoß [10].

Da der Verdichtungsstoß ein nicht adiabatischer Vorgang ist, kann durch weitere adiabatische Stauung der Unterschallströmung hinter dem geraden Stoß der ursprüngliche Kesseldruck p_0 nicht wieder erreicht werden, sondern nur ein Ruhedruck \hat{p}_0 , der kleiner als p_0 ist. Das Verhältnis \hat{p}_0/p_0 der Ruhedrucke ist eindeutig gegeben durch das Druckverhältnis p/p_0 unmittelbar vor dem Stoß. Die Abhängigkeit ist dargestellt in der ausgezogenen Kurve in Mitteil. IV, Abb. 1. Die geraden Verdichtungsstöße können bei der Strömungskonstruktion berücksichtigt werden, indem aus der Konstruktion das Druckverhältnis p/p_0 und dann aus Mitteil. IV, Abb. 1 das Verhältnis \hat{p}/p_0 bzw. \hat{p}_0/p_0 entnommen wird (siehe Abb. 1.2). Eine Konstruktion der Unterschallströmung hinter dem Stoß ist naturgemäß nicht in gleicher Weise möglich.

Neben diesen geraden Verdichtungsstößen treten innerhalb des Überschallgebietes auch sogenannte „schräge Verdichtungsstöße“ auf. Sie liegen im allgemeinen nicht senkrecht zu den Stromlinien. Auskunft über die Zusammenhänge zwischen dem Druck p (Geschwindigkeit w) vor dem Stoß, dem Druck \hat{p} (der Geschwindigkeit \hat{w}) hinter dem Stoß, dem wieder erreichbaren Ruhedruck \hat{p}_0 , dem Winkel σ zwischen Stromlinie und Stoßfront und dem Ablenkungswinkel ϑ der Stromlinien im Stoß gibt das Stoßpolardiagramm. Durch seine Ausnutzung kann der Anwendungsbereich der Charakteristiken-Konstruktion erheblich erweitert werden, zumal in den meisten Strömungen schräge Stöße auftreten. Ein Beispiel dieser Konstruktion ist in Abb. 1.1 durchgeführt. Bei der Anwendung des Stoßpolardiagramms ist zu beachten, daß streng genommen hinter schrägen Stößen keine Potentialströmung mehr möglich ist.

Erläuterungen zu Abb. 1.1 bis 1.4.

Näherungsweise Konstruktion von Überschall-Öldampfströmungen mit Hilfe der Charakteristiken-Methode.

Adiabatexponent: $\kappa = 1,1$

Eingestellter Kesseldruck: $p_0 = 40$ Torr

Anfangswerte der Konstruktion:

Geschwindigkeit (Druck) in der Treibdüsenmündung gemäß Gl. (1) und (2).

Strömungsrichtung in der Treibdüsenmündung gegen Achsenrichtung:

- am Rand, Richtung der Treibdüsenwand,
- in der Mitte, Achsenrichtung.

Randbedingungen der Konstruktion:

- bei freier Strahlgrenze, Außendruck p_g :

Der Strahl expandiert bis $p_d = p_g$.

Die zu diesem Feld gehörige Richtung der Stromlinien bildet die Richtung der freien Strahlgrenze,

- bei Strömung entlang einer festen Wand, Winkel der Wand gegen Achsenrichtung.

Bezeichnungen:

- Verdünnungswelle;
- Verdichtungswelle;
- Strahlgrenze (Stromlinie, die die Grenze zwischen Strahl und umgebendem Gas bildet);
- Verdichtungsstöße, „gerade“ und „schräge“.

Zahlen in den Feldern oberhalb der Mittellinie (— — —): Druck in Torr,

Zahlen in den Feldern unterhalb der Mittellinie: Strömungsrichtung gegenüber der Mittellinie.

Aufgrund der näherungsweisen graphischen Behandlung — charakteristische Beispiele sind in den Abb. 1.1 bis 1.4 dargestellt — bestätigt sich das in Mitteil. I bereits diskutierte Bild über die Strömungsvorgänge: Bei niedrigen Außendruck p_g im Hochvakuumraum expandiert der Strahl beim Austritt aus der Treibdüse so stark, und die Winkel der Stromlinien gegen die Staudüsenwand werden damit so groß, daß an den Wänden Ansätze von geraden Verdichtungsstößen und anschließend schräge Stöße ausgelöst werden, falls der Druck am Ausgang der Staudüse niedrig gehalten wird. Wird bei niedrigem Hochvakuumdruck der Vorvakuumdruck erhöht, so bildet sich in der Staudüse ein gerader Verdichtungsstoß (Abb. 1.2), der verbunden ist mit einem sprunghaften Übergang von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeit. Der in Abb. 1.2 dargestellte gerade Stoß läßt sich auch unabhängig von der Konstruktion rein rechnerisch erfassen, indem nach Gl. (1) die Strahlexpansion ermittelt wird, wobei für F der Staudüsenquerschnitt am Eingang einzusetzen ist. Damit können Druck und Ruhedruck hinter dem Stoß aus Mitteil. IV, Abb. 1 entnommen werden. Die Geschwindigkeiten ergeben sich aus den Gleichungen (2) und (4).

Bei Erhöhen der Außendrucke im Hochvakuumraum wird der Winkel zwischen Strahlgrenze und Achsenrichtung kleiner. Ist der Außendruck nur noch wenig niedriger als der Dampfdruck an der Treibdüsenmündung, so erreicht der Strahl die Staudüsenwand nicht mehr (Abb. 1.3). Bei weiterer Druckerhöhung wird der Dampfstrahl so weit zusammengedrückt, daß er nur noch einen kleinen Teil des Staudüsenquerschnittes einnimmt. Wird der Außendruck p_g gleich dem kritischen Druck p^* , so ist keine Überschallströmung mehr möglich.

Bei der Durchführung der Konstruktion wurde vernachlässigt, daß an den Staudüsenwänden Kondensation eintritt. Inwieweit sie berücksichtigt werden muß, wurde dadurch geprüft, daß der Kühlmantel unterteilt und die Wärmeabgabe in den einzelnen Abschnitten gemessen wurde. Dabei ergab sich, daß — besonders im ersten Kühlbereich — nur ein kleiner Teil der anfallenden Dampfmenge kondensiert. Außerdem kann der Einfluß der Kondensation durch Vergleich der beobachteten Strahlstruktur mit der Konstruktion abgeschätzt werden.

Es muß im Folgenden experimentell geprüft werden:

ob die Gasdynamik als Kontinuumtheorie noch auf die hier vorliegenden Strömungsvorgänge anwendbar ist,

ob bei evtl. auftretenden Verdichtungsstößen die Breite der Stoßfront nicht bereits die Größe der Apparatedimensionen annimmt,

inwieweit die Kondensation des Treibmittels die Strömungsvorgänge ändert,

wie gut das Charakteristikenverfahren erweitert durch das Stoßpolarendiagramm konvergiert,

ob die Konstruktion in der ebenen Näherung noch auf rotationssymmetrische Anordnungen anwendbar ist.

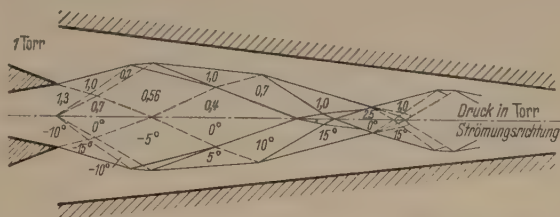


Abb. 1.3. Austritt der Strömung aus der Laval-Düse gegen Unterdruck (1 Torr). Randbedingung: freie Strahlgrenze (Außendruck). Bei Austritt des Strahles nur geringe Ablenkung der Stromlinien nach außen. Die Verdünnungswellen, die in den Strahl hineinlaufen, werden zunächst nicht durch Verdichtungsstößen oder -stöße abgeschwächt. Das bedingt Einstellung von Drucken im Strahlinneren, die wesentlich geringer sind als der Außendruck p_g . Daher wird der Strahl durch den Außendruck stark komprimiert. Es bildet sich eine Einschnürung des Strahles. Der Druck im Strahlinneren wird höher als der Außendruck, was Expansion zur Folge hat. Es kommt zu erneuter Überexpansion, so daß wieder Kompression folgen muß.

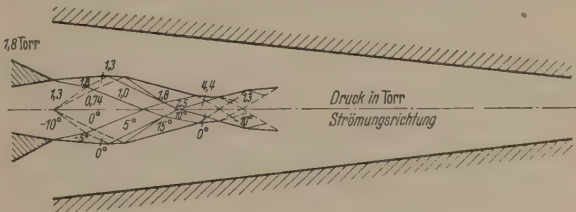


Abb. 1.4. Austritt der Strömung aus der Laval-Düse gegen äußeren Überdruck (1,8 Torr). Von der Treibdüsenmündung aus laufen Verdichtungsstößen in den Strahl hinein. Die Stromlinien werden zur Mittellinie hinabgelenkt. Im Strahlkern treten Drucke auf, die höher als der Außendruck sind. Analog Abb. 4 folgt hier Expansion. Der maximale Strahlquerschnitt ist, wie auch leicht einzusehen, wesentlich kleiner als in Abb. 1.3.

Durch Beobachtung der Strömung und Vergleich mit entsprechenden Konstruktionen können gute Anhaltspunkte zur ersten Frage und eine weitgehende Entscheidung der übrigen Fragen gewonnen werden. Eine endgültige Entscheidung, insbesondere der Frage nach der Gültigkeit der Gasdynamik, ist nur möglich, indem die Werte, die mit Hilfe der gasdynamischen Modellvorstellungen errechnet werden können, verglichen werden mit Messungen charakteristischer Daten der Strömung. (Vgl. Mitteilung IV).

3. Versuchsanordnung zur Beobachtung von Überschall-Öldampfströmungen [3], [12].

Bei den hier vorliegenden niedrigen Drucken war es nicht möglich, die Strömung in der sonst üblichen Weise durch Schlieren- oder Interferenzmethoden sichtbar zu machen. Auch direkte elektrische Anregung des Strahles zum Selbstleuchten, die bei Quecksilberdampfströmungen mit Erfolg durchgeführt wurde (vgl. Mitteilung I), war hier nicht ohne weiteres möglich, da die organischen Treibmittel in der Entladung cracken. Der Abbau führte dabei teilweise bis

zum Kohlenstoff. Nach kurzer Zeit waren bereits die Wände mit einer dicken Kohlenstoffschicht bedeckt.

Eine bekannte Methode, Strömungsvorgänge sichtbar zu machen, besteht darin, das strömende Gas zuvor in einer elektrischen Entladung zum Nachleuchten anzuregen. Im hier vorliegenden Fall war allerdings aus den bereits genannten Gründen nur eine Anregung des an der Hochvakuumseite angesaugten Gases, nicht des Treibmittels möglich. Dazu wurde folgende Versuchsanordnung (Abb. 2) benutzt: Im Hochvakuumraum einer Öldampfstrahlpumpe unmittelbar oberhalb der Treibdüse T wurde eine Elektrode 1 und in der Gaseinlaßleitung eine zweite Elektrode 2 angebracht. An die Elektroden wurde eine Spannung von einigen kV gelegt und eine Stromstärke von 10 bis 50 mA eingestellt. In der Vorpumpenleitung wurde eine weitere Elektrode 3 angebracht, die wahlweise mit eingeschaltet werden konnte. Erdung einer der Elektroden war nicht möglich, da sonst unerwünschte Entladungen zur Vorpumpe und zu den aus Sicherheitsgründen geerdeten Gaseinlaßventilen gezündet hätten.

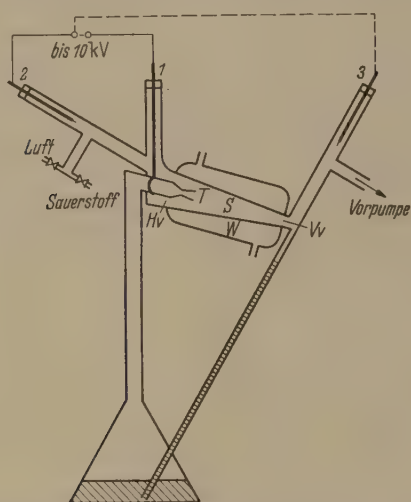


Abb. 2. Schema der Versuchsanordnung zur Beobachtung von Überschall-Öldampfströmungen. T = Treibdüse; S = Staudüse; W = Wasserkuhlmantel; Hv = Hochvakuumraum; Vv = Vorpumpenraum; $1-3$ = Elektroden.

Zur Beobachtung der Strömung wurde das angesaugte Gas zwischen den Elektroden 1 und 2 zum Nachleuchten angeregt. Optimale Intensität ließ sich mit einem Stickstoff-Sauerstoff-Gemisch erreichen, dessen Mischungsverhältnis mit dem Ansaugdruck variiert wurde. Mit dieser Methode konnte zwar die Strahlgrenze, aber nicht die Struktur des Strahles sichtbar gemacht werden.

Hierfür hat sich als günstig erwiesen, eine schwache Hilfsentladung zwischen den Elektroden 1 und 3 brennen zu lassen. Zwar trat dann bereits teilweise Dissoziation der Ölmoleküle ein. Sie konnte aber soweit beschränkt werden, daß die Wände des eigentlichen Beobachtungsraumes durch den Dampfstrahl selbst sauber gehalten wurden.

Ein weiterer Umstand mußte bei der Anwendung der Gasentladung berücksichtigt werden. Die starke adiabatische Expansion bei der Beschleunigung des Dampfes brachte eine Abkühlung mit sich, die — bei Expansion von 40 Torr Kesseldruck auf einen Druck in der Staudüse von 0,1 Torr — von der Dampftemperatur im Kessel (500°K) auf ca. 290° K führte. Demgegenüber entspricht einem Dampfdruck von 0,1 Torr

bei dem verwendeten Treibmittel eine Temperatur von ca. 380° K. Das bedeutet, daß der Dampf unterkühlt war. Kondensation im Strahl wurde im allgemeinen nicht beobachtet¹. Wurden aber durch eine Gasentladung Ionen in den Dampfstrahl gebracht, so bestand die Gefahr der Kondensation.

Mit der oben dargestellten Anordnung ist es gelungen, die Struktur der Öldampfströmungen sichtbar zu machen.

Gewisse photographische Schwierigkeiten ergaben sich durch den großen Helligkeitsunterschied zwischen dem Hochvakuumraum einerseits, der sowohl durch die dort unmittelbar neben dem Bildfeld angebrachte Entladung als auch durch die nachleuchtenden Gase erhellt wurde, und der Strahlstruktur andererseits, deren Leuchtintensitäten und Kontraste relativ gering waren. Neben der Wiedergabe der Grauwertkontraste schien es angebracht, auch die Farbkontraste festzuhalten. Wegen des relativ großen Belichtungsspielraumes wurde ein Negativ-Positiv-Verfahren (Agfacolor) angewendet.

Farbige Wiedergabe der Aufnahmen folgt im Rahmen der Forschungsberichte des Wirtschaftsministeriums von Nordrhein-Westfalen (Westdeutscher Verlag Opladen-Köln).

4. Diskussion der beobachteten Strömungsvorgänge und Vergleich mit den gasdynamischen Konstruktionen [2], [8].

In der nun folgenden Diskussion der Bilder wird in der Weise vorgegangen, daß beim Endvakuum beginnend an der Hochvakuumseite Gas eingelassen, d. h. der Hochvakuumdruck p_g erhöht wird und damit zwangsläufig auch der Vorpumpenraumdruck.

Bei niedrigen Hochvakuumdrücken (Abb. 3.1) tritt der Strahl unter einem sehr großen Winkel aus der Treibdüse aus. Anhand der Druckabhängigkeit dieses Winkels kann auf das erreichbare Endvakuum der Dampfstrahlpumpen geschlossen werden. An der Stelle, an der der Strahl die Staudüsenwand erreicht, beginnen leuchtende Streifen, die als Verdichtungsstöße gedeutet werden können. Ihre Fortsetzung ins Strahlinnere hinein führt in guter Übereinstimmung mit der Konstruktion (Abb. 1.1), die schematisch in Abb. 4.1 wiederholt ist, zu gegabelten Verdichtungsstößen.

In der Konstruktion ergibt sich am Staudüseneingang infolge des großen Winkels, unter dem der Strahl auf die Staudüsenwand trifft, der Ansatz eines geraden Verdichtungsstoßes und anschließend, da der Gegen-druck an der Vorpumpen- oder Vorvakuumseite zu niedrig ist, eine neue freie Strahlgrenze. Entsprechend diesen Tatsachen kann Abb. 3.2 gedeutet werden. Der Hochvakuumdruck ist gegenüber Abb. 3.1 erhöht, jedoch nur so wenig, daß sich an den Verhältnissen am Staudüseneingang nichts Wesentliches ändert. Gleichzeitig erhöht sich aber der Vorpumpen- oder Vorvakuumdruck, so daß die Ausbildung von geraden Verdichtungsstößen begünstigt wird. Die in Abb. 3.2 festgehaltene Erscheinung trat zunächst am hinteren Ende der Staudüse auf und wanderte bei Druckerhöhung in Richtung Treibdüse. Der Vor-

¹ In Wasserdampfstrahlsaugern kann die Abkühlung zur Bildung von Eiskristallen führen. Nach GAEDE kann das verhindert werden durch Ausnutzung der Wärmeleitung einer Metall-Staudüse nach BUSCH durch Heizung der (Glas-) Staudüse.

vakuumdruck war jedoch in diesem Fall nicht so hoch, daß ein gerader Verdichtungsstoß ohne weiteres möglich ist. Im Anschluß an den Ansatz eines geraden Stoßes (in Abb. 3.2 ca. 1,5 cm hinter der Treibdüsenmündung) wurde die in Abb. 1.1 theoretisch voraus-

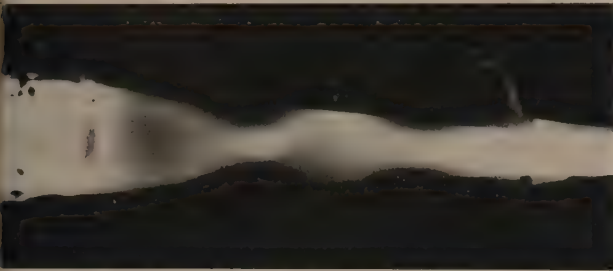


Abb. 3.1. Öldampfstrahl mit schrägen Verdichtungsstößen. Hochvakuumdruck = 10^{-2} Torr, Vorvakuumdruck = 0,1 Torr.

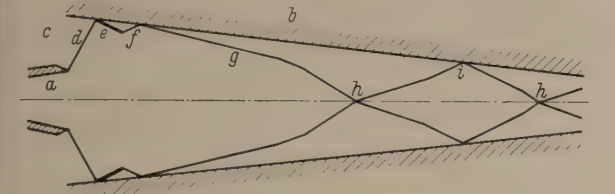


Abb. 4.1. Schema der Abb. 3.1 entsprechenden Konstruktion. *a* = Treibdüse; *b* = Staudüse mit Kühlmantel; *c* = leuchtendes angesaugtes Gas; *d* = Strahlgrenze; *e* = Ansatz eines geraden Verdichtungsstoßes; *f* = erneute Strahl-expansion (freie Strahlgrenze); *g* = schräger Verdichtungsstoß; *h* = Gabelungspunkte der schrägen Verdichtungsstöße; *i* = Reflektion der schrägen Stöße an der Staudüsenwand.

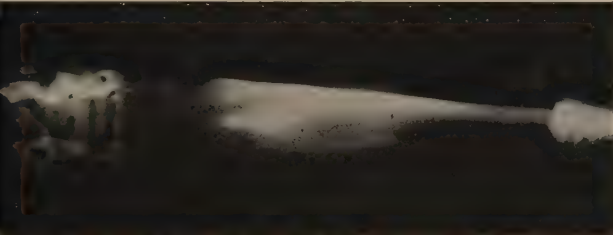


Abb. 3.2. Öldampfstrahl mit geradem Verdichtungsstoß und anschließend erneuter Expansion. Hochvakuumdruck: 0,1 Torr; Vorvakuumdruck: 1 Torr (vgl. hierzu Mitteilung I).

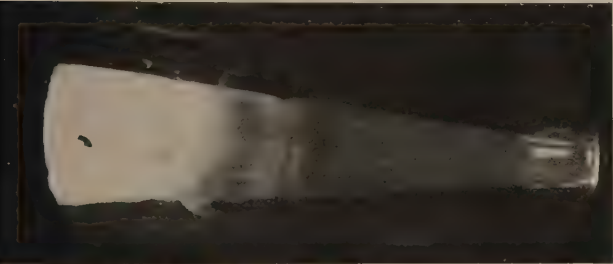


Abb. 3.3. Öldampfstrahl mit geradem Verdichtungsstoß. Hochvakuumdruck = 0,1 Torr; Vorvakuumdruck = 1,1 Torr.

gesagte freie Strahlgrenze beobachtet, die in Abb.3.2 als rötlicher Pinsel zu erkennen ist. Die gleiche Erscheinung wurde auch bereits früher in Quecksilberdampfströmungen in Düsen beobachtet, (vgl. Mitteilung I). Diese Erscheinungen spielen bei den Dampfstrahlpumpen eine wesentliche Rolle für die Abhängigkeit der Saugleistung von der Gasart.

Bei weiterem Gaseinlaß bildete sich ein stabiler, gerader Stoß aus (Abb.3.3). Der Hochvakuumraum wurde durch einen kurzen Überschallstrahl im ersten

Teil der Staudüse gegen den Vorvakuumraum abgesperrt. Der Vorvakuumdruck war so hoch, daß sich ein gerader Verdichtungsstoß einstellen konnte.

Mit wachsendem Druck im Hochvakuumraum rückte der Stoß immer weiter in Richtung Treib-

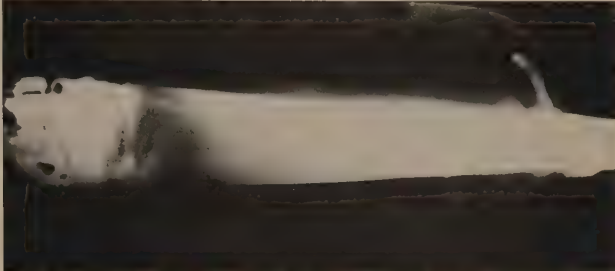


Abb. 3.4. Gerader Verdichtungsstoß, der eben noch den Hochvakuumraum vom Vorvakuumraum abtrennt. Es ist bereits der Ansatz zur Rückströmung zu erkennen. Hochvakuumdruck: 0,2 Torr.

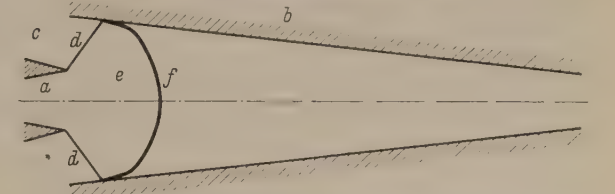


Abb. 4.4. Schema der Konstruktion des geraden Verdichtungsstoßes. *a* = Treibdüse; *b* = Staudüse mit Kühlmantel; *c* = leuchtendes angesaugtes Gas; *d* = Strahlgrenze; *e* = Überschallstrahl; *f* = gerader Verdichtungsstoß.



Abb. 3.5. Beginn der Rückströmung vom Vorvakuum- in den Hochvakuumraum. Durch die Rückströmung wird höherer Hochvakuumdruck und damit kleinerer Austrittswinkel des Strahles bedingt. Hochvakuumdruck 0,7 Torr — Vorvakuumdruck 3,9 Torr. Das Auftreten von wesentlichen Öldampfmengen im Hochvakuumraum infolge der Rückströmung ist am Farbumschlag nach rötlichen Tönen im Hochvakuum im Gegensatz zu den Abbildungen 3.1 bis 3.4 zu erkennen.

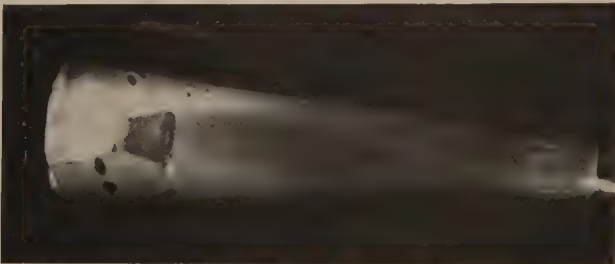


Abb. 3.6. Ausbildung eines freien Strahles, der aus der Lavaldüse bei geringem Unterdruck im Hochvakuumraum gegenüber dem Dampfdruck an der Düsenmündung austritt, ohne die Staudüsenwand zu erreichen. Hochvakuumdruck 1,0 Torr — Vorvakuumdruck 3,9 Torr.

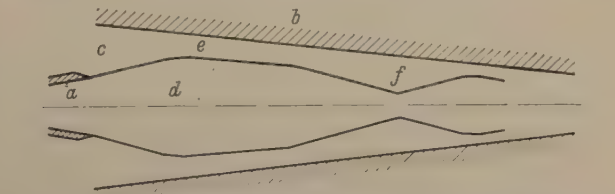


Abb. 4.6. Schema der Konstruktion des freien Strahles. *a* = Treibdüse; *b* = Staudüse mit Kühlmantel; *c* = leuchtendes angesaugtes Gas gemischt mit Öldampf; *d* = Dampfstrahl; *e* = rückströmendes Gas; *f* = Strahleinschnürung.

düse. Er bildete sich schließlich unmittelbar an der Stelle aus, an der der Strahl die Staudüsenwand erreichte (Abb. 3.4). Auch dieser Fall wurde bereits als Konstruktion (Abb. 1.2 und 4) angeführt. Hier ist der Hochvakuumraum mit niedrigem Druck vom Vorvakuumraum mit hohem Druck an der Staudüsenwand nur durch einen schmalen Ring getrennt. Es tritt hier also ein großer Druckgradient auf. Da praktisch keine Strömung in Staudüsenrichtung vorhanden ist, wird eine starke Neigung dazu bestehen, daß Gas aus dem Vorvakuumraum in den Hochvakuumraum entlang der Wand zurückströmt. Hierdurch wird die Abhängigkeit der Saugleistung von Dampfstrahlpumpen von der Gasart und durch den geraden Stoß die Vorvakuumfestigkeit bestimmt. Infolge der Neigung zur Rückströmung von Gas längs der Staudüsenwand kommt es zu einem Druckangleich bzw. im Hochvakuumraum einem Druckanstieg, ohne daß die eingelassene Gasmenge wesentlich erhöht wird. Gasdynamisch ist zu erwarten, daß gleichzeitig der Winkel der Strahlgrenze gegen die Achsenrichtung beim Austritt aus der Treibdüse gegenüber den bisherigen Fällen wesentlich verkleinert wird (Abb. 3.5). Außerdem ergibt sich aus einem Farbumschlag im Hochvakuumraum die andere Gaszusammensetzung, denn dorthin gelangt in wesentlich höherem Maße als bisher Öldampf, der vom rückströmenden Gas mitgerissen wird.

Bei weiterer Druckerhöhung bildet sich in der Staudüse ein freier Strahl, der die Wände nicht mehr erreicht, wie sich aus der Beobachtung (Abb. 3.6) und damit übereinstimmend aus der Konstruktion (Abb. 1.3 und 4) ergibt. Gleichzeitig wird die Rückströmung immer stärker, der Druckunterschied zwischen „Vorvakuumraum“ und „Hochvakuumraum“ immer geringer.

Auch bei noch höherem Druck wird durch den sehr schmalen Strahl (Abb. 1.4) noch Gas gefördert. Zwar ist der Strahl selbst kaum mehr beobachtbar; dafür reißt die jetzt sehr heftige Rückströmung größere Flüssigkeitsmengen mit, die etwa in der Mitte der Staudüse aufgestaut werden.

Zusammenfassung.

Durch den Vergleich zwischen gasdynamischen Berechnungen und Konstruktionen einerseits und dem beobachteten Strömungsverlauf andererseits gelangen

wir zu folgenden Ergebnissen: Es werden Strömungsstrukturen erkannt, die in der ganzen Staudüse und im gesamten untersuchten Druckbereich, also zwischen 10^{-2} Torr und einigen Torr, den aufgrund gasdynamischer Konstruktionen erwarteten Strukturen entsprechen. Bei einer Deutung gemäß den Aussagen der Gasdynamik sind keine Abweichungen feststellbar, die auf einen der zu Beginn genannten offenen Punkte zurückzuführen wären. Es ist also weder ein Einfluß der endlichen Breite der Stoßfronten, noch ein Einfluß der Kondensation an den Staudüsenwänden feststellbar. Auch die Form, in der die Methoden der Gasdynamik angewendet wurden, scheint — unter Voraussetzung der Richtigkeit der obigen Deutung — zulässig zu sein. Bei den hier diskutierten Beispielen ergab sich das keineswegs triviale Ergebnis der Übereinstimmung zwischen den gasdynamischen Konstruktionen in ebener Näherung und den Experimenten, die in einer rotationssymmetrischen Anordnung durchgeführt wurden. Endgültige Aussagen über die Richtigkeit der Deutung der beobachteten Strömungsvorgänge entsprechend den Ergebnissen der Gasdynamik sind nur dann möglich, wenn quantitativ nachgewiesen werden kann, daß die berechneten Geschwindigkeiten und Drucke tatsächlich auftreten. Dabei genügt es jedoch, wenn dieser Nachweis, z. B. für die Mittellinie der Anordnung, geführt wird. Der experimentelle Weg hierzu und die dabei ermittelten Ergebnisse sollen in Mitteilung IV ausführlich behandelt werden.

Literatur. [1] BUSEMANN, A.: Handbuch der Experimentalphysik IV. 1. Akad. Verlagsges. Leipzig 1931. — [2] DAYTON, B. B.: Rev. Sci. Instruments, **19**, 793 (1948). — [3] FOLSOM, R. G.: Chem. Engng. Progr., **48**, 542 (1952). — [4] JAECKEL, R.: Kleinste Drucke, ihre Messung u. Erzeugung, Springer, Berlin 1950. — [5] JAECKEL, R. u. H. G. NÖLLER: Phys. Bl. (Verh.) **6**, 103 (1950). — [6] JAECKEL, R., H. G. NÖLLER u. H. KUTSCHER: Phys. Verh. **4**, 209 (1953). — [7] JAECKEL, R., H. G. NÖLLER u. H. KUTSCHER: Vakuumtechnik **3**, 1 (1954). — [8] NÖLLER, H. G.: Dissertation, Bonn 1950. — [9] OSWATITSCH, K.: Gasdynamik, Springer, Wien 1952. — [10] SAUER, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik, Springer Berlin 1951. — [11] SCHMIDT, E.: Einführung in die technische Thermodynamik, Springer, Berlin 1950. — [12] WILLIAMS, T. W. u. J. M. BENSON: National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 1900 (1949).

Dr. HORST KUTSCHER,

Physikalisches Institut der Universität Bonn,
Abteilung Vakuum.

Die physikalischen Vorgänge in Diffusions- und Dampfstrahlpumpen.

IV. Eine Methode zur Druckmessung in Überschall-Dampfströmungen bei niedrigen Drucken, ihre Ergebnisse und ihr Vergleich mit den Strömungsbildern.

VON HORST KUTSCHER

Mit 14 Textabbildungen.

(Eingegangen am 2. Oktober 1954.)

1. Problemstellung.

In Mitteilung III wurde die Frage der theoretischen und experimentellen Untersuchung von Überschall-Öldampfströmungen bei niedrigen Drucken behandelt. Es wurde die theoretische Behandlung der Strömungsvorgänge mit gasdynamischen Methoden kurz skizziert und mit Strömungsbildern verglichen. Dabei ergab sich Übereinstimmung der gasdynamisch

näherungsweise ermittelten und der beobachteten Struktur der Strömung. Zur endgültigen Entscheidung über die Gültigkeit der Gasdynamik im Druckbereich zwischen 10 Torr und 10^{-2} Torr bei den hier vorliegenden Apparatedimensionen und zur Erlangung einer genaueren Kenntnis der Strömungsvorgänge ist eine quantitative Bestimmung des Druckes und der Strömungsgeschwindigkeit im Dampfstrahl erforder-

ich. Es ist naheliegend, Sonden ähnlich dem bekannten PRANDTL-Rohr in den Strahl zu bringen [1]. Die hierbei auftretenden Probleme sollen im Folgenden untersucht und die Ergebnisse von Sondenmessungen diskutiert und mit den Ergebnissen von Mitteilung I—III verglichen werden. Die Düsenanordnung, an der die im Folgenden besprochenen Untersuchungen durchgeführt wurden, war wieder die gleiche wie in Mitteilung III, allerdings in vergrößertem Maßstab. Alle Messungen wurden bei einem Kesseldruck von ca. 40 Torr ausgeführt.

2. Entwicklung von Sonden für Messungen in Überschall-Dampfströmungen.

Zur Messung von Drucken in Unterschallströmungen sind zwei Sondenformen bekannt. Mit einem seitlich angebohrten Rohr wird der statische Druck, mit einer Bohrung in Strömungsrichtung der Staudruck gemessen. Aus beiden Messungen zusammen kann die Strömungsgeschwindigkeit bestimmt werden.

In ähnlicher Weise können auch Druck und Geschwindigkeit in Überschallströmungen ermittelt werden. Der statische Druck wird nach Einbau besonderer Zusatzeinrichtungen in die Sonde wieder mit seitlich angebrachten Bohrungen gemessen. Eine Staudruckmessung ist in Überschallströmungen jedoch nicht möglich, da die adiabatische Stauung Schwierigkeit bereitet. Das rührt daher, daß sich im allgemeinen vor einem Hindernis mindestens lokal gerade Verdichtungsstöße bilden. Es wird also der Druck gemessen, der sich bei dem örtlichen statischen Druck hinter einem geraden Verdichtungsstoß und nach anschließender adiabatischer Stauung bis zur Geschwindigkeit Null ergibt (Pitot-Druck). Dies ist in Abb. 1 dargestellt. Bei den Expansionen, die praktisch vorkommen, und die in Mitteilung III bereits berechnet worden sind, ist der Druck \hat{p} hinter dem geraden Verdichtungsstoß (gestrichelte Kurve in Abb. 1) nahezu gleich dem Druck \hat{p}_0 , der nach abschließender adiabatischer Stauung erreicht wird (ausgezogene Kurve in Abb. 1).

Liegt in der untersuchten Strömung selbst bereits vor der Meßstelle ein gerader Verdichtungsstoß, so wird demnach der Pitot-Druck und der statische Druck praktisch gleich sein.

Die Ausführung von zuverlässigen Druckmessungen mit einer Sonde setzt voraus, daß die Strömungsrichtung bekannt ist. Daher wird für die Messungen die in Abb. 2 dargestellte rotationssymmetrische Versuchsanordnung gewählt und der Druck entlang der Mittellinie gemessen.

Zur Entwicklung einer geeigneten Sondenform für Messungen in Überschalldampfströmungen sind wir von einer Form ausgegangen, die sich für Unterschallströmungen bewährt hat. Die eigentliche Druckmessung erfolgte mit einem McLEODschen Vakuummeter, das mit der Sonde verbunden war. Um Verfälschungen der Messungen durch das Eindringen von Dämpfen in das Vakuummeter zu verhindern, bestand die Möglichkeit, dessen Meßkapillare zu heizen.

In Abb. 3 sind Meßergebnisse dargestellt, die mit einer Sonde gemäß Abb. 2 erzielt wurden. Gemessen wurde der Druck entlang der Mittellinie der im Bild unten schematisch angedeuteten Düsenanordnung bei zuvor eingestellten Hochvakuum- und Vorvakuumdrucken. Scharparameter in Abb. 3 ist der Vor-

vakuumdruck. Die Messung zeigt, daß bei einem Hochvakuumdruck von 10^{-3} Torr im Strahlkern in Höhe des Hochvakuumraumes ungefähr 1 Torr gemessen wurde anstelle eines Druckes von weniger als 0,1 Torr, wie er aufgrund des Flächenverhältnisses —

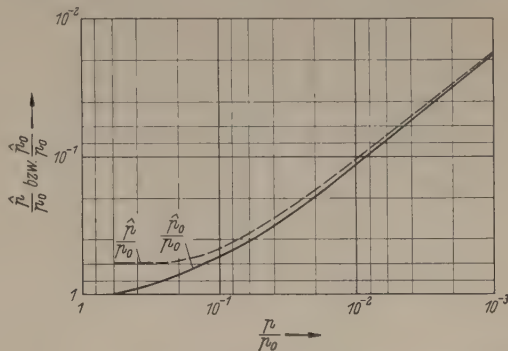


Abb. 1. Berechneter Drucksprung im geraden Verdichtungsstoß und Pitotdruck ($x = 1,1$).

kritischer Querschnitt der Lavaldüse zu Staudüsenquerschnitt — zu erwarten wäre (gestrichelte Kurve in Abb. 3). Der gemessene Druck sinkt im wesentlichen hinter der Staudüse auf den Vorvakuumdruck ab. Es wird also vermutlich in einem Unterschall-

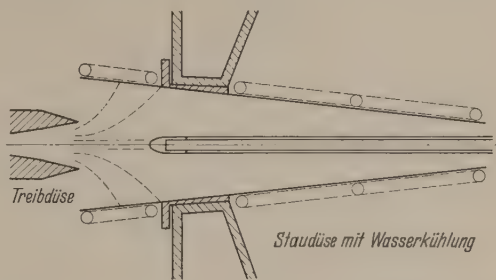


Abb. 2. Düsenanordnung für die Sondenmessungen mit stumpfer Sonde.

gebiet hinter einem geraden Stoß gemessen, der durch den stumpfen Sondenkopf aufgelöst wird. Diese Schwierigkeit wurde dadurch behoben, daß an die Stelle der tropfenförmig abgerundeten Sondenverkleidung eine kegelförmige Spitze trat.

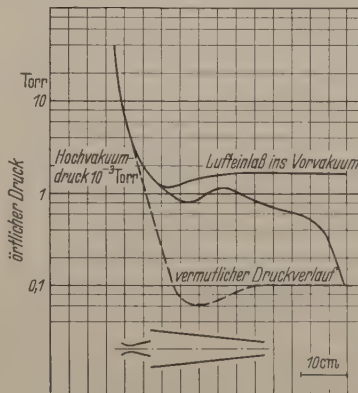


Abb. 3. Druckmessung mit stumpfer Sonde.

Die Messung hat zwar die erwartete Expansion (Abb. 4) ergeben, jedoch wurde bei Erhöhung des Vorvakuumdruckes ein erhöhter Druck bis in den Hochvakuumraum hinein gemessen, obgleich ein konstanter Hochvakuumdruck von 10^{-3} Torr vorlag. Es scheint also eine Grenzschichtströmung entlang

der Sonde aufzutreten. Das wurde bestätigt durch folgende Beobachtung: Wurden Kondensatropfen an das Sondenrohr gebracht, so flogen sie entgegen der Grundströmung in Richtung Treibdüse ab.

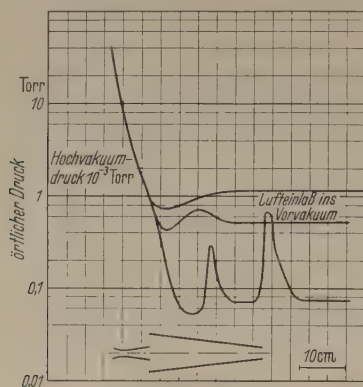


Abb. 4. Druckmessung mit spitzer, ungekühlter Sonde.

Die Grenzschicht konnte dadurch beseitigt werden, daß das Sondenrohr gekühlt wurde (Abb. 5). Das hatte andererseits aber zur Folge, daß im Meßkopf und in der Sondenableitung Kondensation eintrat. Um die Kondensation im Meßkopf und damit eine Verstopfung der feinen Meßbohrungen zu verhindern, wurde der Kopf geheizt. Um eine Kondensation

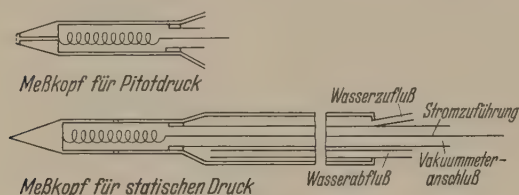


Abb. 5. Sonde zur Druckmessung in Überschall-Dampfströmungen.

sation im Sondenrohr und damit ein Druckgefälle zwischen Meßkopf und Vakuummeter zu verhindern, wurde vor jeder Messung Luft in die Sonde eingelassen. Dies kann nur zum Erfolg führen, solange der Rohrdurchmesser größer als die freie Weglänge ist, da sonst mit Diffusion gerechnet werden muß und eine Verdrängung eines schweren Gases durch ein leichtes nicht mehr möglich ist.

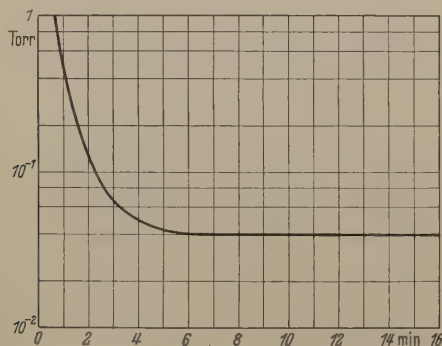


Abb. 6. Einstellzeit der Sonde bei Messung mit vorherigem Gaseinlaß.

Damit war eine Bedingung für die Dimensionierung des Sondenrohres gegeben. Der Lufteinlaß hat zur Folge, daß sich der Druck nur langsam einstellt (Abb. 6). Dabei ergab sich, daß nach ungefähr 6–7 min mit Sicherheit Druckgleichgewicht herrscht.

Aufgrund der Messung mit Luftpolster mußte der Sondenkopf so dimensioniert werden, daß der Strömungswiderstand der Leitung zum Vakuummeter

kleiner war als der Strömungswiderstand der Meßbohrungen, da anderenfalls Dampf in den Meßkopf gelangt wäre. Da noch keine KNUDSEN-Strömung vorliegt, sondern mit einer HAGEN-POISSEUILLE-Strömung gerechnet werden darf, ergibt sich die Bedingung

$$\frac{R^4}{L} < 4 \frac{r^4}{l} \quad (1)$$

R = Radius der Leitung zum Vakuummeter (3 mm)

L = Länge der Leitung zum Vakuummeter (80 cm)

r = Radius der Meßbohrung (4 Bohrungen) (0,4 mm)

l = Länge der Meßbohrung (1 mm).

Es ist zu ersehen, daß die Meßbohrungen als Rohre und nicht als Blenden erfaßt werden müssen. Mit den angegebenen Zahlenwerten sind obige Bedingungen für Drucke oberhalb etwa 0,1 Torr erfüllt.

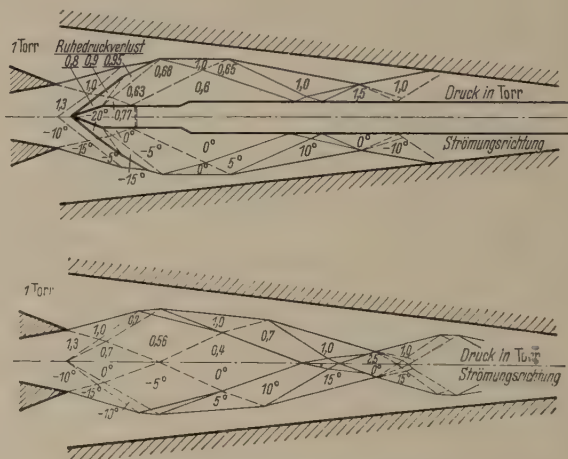
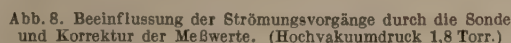


Abb. 7. Beeinflussung der Strömungsvorgänge durch die Sonde und Korrektur der Meßwerte (Hochvakuumdruck 1 Torr). Näherungsweise Konstruktion für eine ebene Düsenanordnung.

Eine weitere mögliche Fehlerquelle bilden die schrägen Stöße, die von der Spitze der Sonde ausgehen. Dies soll zunächst theoretisch mit Hilfe der Charakteristiken-Methode und des Stoßpolaren-Diagramms in ebener Näherung untersucht werden. Abb. 7 zeigt die Strömungskonstruktion ohne und mit eingeführter Sonde bei einem Gegendruck von 1 Torr im Hochvakuumraum. Dabei ist die Sonde bis nahezu an den Treibdüsenausgang vorgeschoben. Sie steht also an einer ungünstigen Stelle (s. unten), da dort der Strahlquerschnitt noch nicht sein volles Maß erreicht hat. Die tatsächlich auftretenden Fehler werden also in vielen Fällen kleiner sein als die hier ermittelten.

Der Druck im Strahl beim Austritt aus der Laval-düse ergibt sich aufgrund des Flächenverhältnisses zu 1,3 Torr. Bei einem Gegendruck von 1 Torr tritt also beim Austritt aus der Laval-düse eine leichte Expansion ein. Bei eingeschobener Sonde bildet sich an deren Spitze ein schräger Verdichtungsstoß, der nach außen hin aufgrund der eben genannten Strahlexpansion abgeschwächt wird. Am Knick der Sonde vor der Meßbohrung bilden sich Verdünnungswellen, die ebenfalls im äußeren Teil des Strahles mit dem schrägen Verdichtungsstoß zusammenlaufen. Der Druck an der Meßstelle setzt sich zusammen aus dem Druckanstieg im Verdichtungsstoß und dem Druckabfall in der Verdünnungswelle. Druckanstieg und Druckabfall kompensieren sich, so daß der Druck

In Abb. 8 ist die gleiche Konstruktion durchgeführt bei einem Gegendruck in „Hochvakuumraum“ von 1,8 Torr. Hier läuft — ausgehend vom Treibgasausgang — eine Verdichtungsstelle in den Strahl hinein, da der Gegendruck höher als der Austrittsdruck ist. An der Spitze der Sonde wird wiederum ein schräger Verdichtungsstoß ausgelöst und am Sondenknick vor der Meßstelle Verdünnungswellen. In diesem Fall hat aber der Verdichtungsstoß mit der Sonde hezu unverminderter Intensität die Strahlgrenze er-



dem Druckabfall in der Verdünnungswelle. Anstieg und Abfall kompensieren sich wiederum. Aus Abbildung 8 ist eine hintere Grenze für den Ort der Meßstelle zu ersehen. Sie muß vor der Stelle liegen, an der die Verdünnungswelle, die aus der Reflexion des Verdichtungsstoßes entsteht, auf die Sonde trifft. Die vordere Grenze für den Ort der Meßstelle ist gegeben durch den Druckausgleich in Verdichtungsstoß und Verdünnungswelle.

Wir erhalten die Grenzen für die Sondenmessungen in der gegebenen Anordnung: Nach hohem Druck hin ist eine Messung möglich, solange der Strahlquerschnitt noch nicht in der gleichen Größenordnung wie der Sondenquerschnitt liegt. Die Begrenzung nach niedrigen Drucken ist durch die Weite der Meßbohrungen und Vakuummeterleitung bestimmt.

a) Überblick.

Ergebnisse der Druckmessungen mit den oben diskutierten Sonden sind dargestellt in Abb. 10. In der rechten Bildhälfte ist der statische Druck, in der linken der Pitotdruck in Abhängigkeit vom Ort der Meßstelle aufgetragen. Es wurde bei jeweils festem Hochvakuumdruck, der durch Lufteinlaß an der Hochvakuumseite eingestellt wurde, die Sonde längs

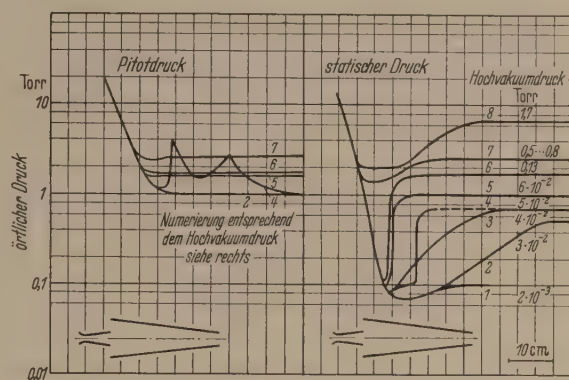


Abb. 10. Überblick über die Sondenmessungen bei Gaseinlaß
an der Hochvakuumseite.
Links: Pitotdruck,
rechts: Statischer Druck.

Überschreitet der Hochvakuumdruck einen bestimmten Wert, so sind in der Staudüse sprunghafte Druckanstiege zu beobachten, zunächst im hinteren Teil, dann immer weiter zur Treibdüse hin vorrückend (Abb. 10, Kurven 4—6). In Kurve 6 ist hinter dem sprunghaften Anstieg der statische Druck und der Pitotdruck gleich. Bei weiterem Gaseinlaß an der Hochvakuumseite expandiert der Strahl nicht mehr so stark wie bisher, und es folgt wieder ein stetiger Druckanstieg in der Staudüse.

b) Niedrige Gegendrucke und geringe Kompression

Im Folgenden sollen die einzelnen Fälle genauer besprochen und mit den Strömungskonstruktionen und -beobachtungen verglichen werden.

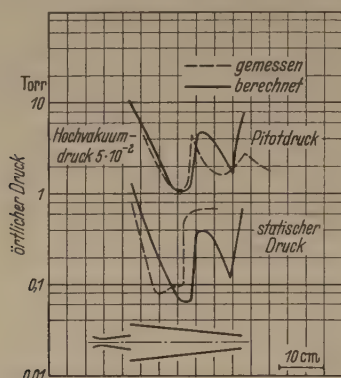


Abb. 11. Vergleich der gemessenen und gasdynamisch ermittelten Drücke in der Staudüse bei niedrigem Gegendruck und geringer Kompression.

Wird kein Gas eingelassen, so expandiert der Strahl bis zu Drucken kleiner als 0,1 Torr (Abb. 10, Kurve 1). Ein genauer Wert läßt sich nicht auf Grund der Sondenmessungen angeben, da die Sonde in diesem Druckbereich keine exakte Messung mehr zuläßt, wie oben festgestellt wurde. Das mit der Pumpe erreichte Endvakuum lag bei $2 \cdot 10^{-3}$ Torr. Die Kompression in der Staudüse führte bis 0,1 Torr. Dieser Druck war bedingt durch die verwendete einstufige Vorpumpe.

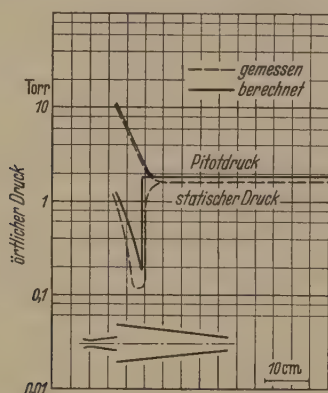


Abb. 12. Vergleich der gemessenen und gasdynamisch ermittelten Drücke in der Staudüse bei niedrigem Gegendruck und starker Kompression (gerader Verdichtungsstoß).

Die Messung des Pitotdruckes ergab Expansion bis 1 Torr in der Treibdüse und im ersten Teil der Staudüse. Im weiteren Verlauf der Strömung sank der Pitotdruck auf keinen Fall unter 1 Torr, stieg aber auch im allgemeinen nicht wieder an. Er wuchs nicht stetig, wie es zu erwarten wäre, wenn in der Staudüse adiabatische Kompression der Überschallströmung einträte. Daß Überschallströmung vorlag, ist aus dem Unterschied zwischen statischem und Pitotdruck zu ersehen (vgl. Abb. 1).

Bei Gaseinlaß in den Hochvakuumraum und damit Druckerhöhung blieben die Verhältnisse im wesentlichen unverändert (Abb. 10, Kurven 1—3) bis zu einem Hochvakuumdruck von $4 \cdot 10^{-2}$ Torr. Die Kompression hat in diesem Fall auf einen Vorvakuumdruck von 0,7 Torr geführt. Bei $5 \cdot 10^{-2}$ Torr Hochvakuumdruck war erstmalig ein wesentlich steilerer

sprunghafter Anstieg des statischen Druckes und an der gleichen Stelle ein steiler Anstieg des Pitotdruckes festzustellen. Für die hier vorliegenden Druckverhältnisse wurde die Strömungskonstruktion durchgeführt (Abb. 1.1 in Mitteilung III). Es ergaben sich schräge Verdichtungsstöße, die die Mittellinie an den Stellen erreichen, an denen steile Druckanstiege gemessen wurden. Um den Vergleich zu vereinfachen, sind in Abb. 11 die Druckmessungen, die aus der Konstruktion entnommenen statischen Drucke und die hieraus mit Hilfe der Abb. 1 berechneten Pitotdrucke einander gegenübergestellt. Es ergibt sich eine Übereinstimmung, in der gleichen Weise, wie sie bereits in Mitteilung III beim Vergleich zwischen Strömungsbildern und Konstruktion festgestellt wurde. Es zeigt sich also, daß die Deutung der beobachteten Leuchterscheinung als schräge Stöße auch aufgrund der quantitativen Druckmessung bestätigt werden kann.

c) Niedrige Gegendrucke und starke Kompression.

Bei Hochvakuumdrucken zwischen $5 \cdot 10^{-2}$ Torr und 0,13 Torr werden statische Drucke gemessen, die in der Staudüse sprunghaft ansteigen. Mit wachsendem Hochvakuumdruck wandert der Drucksprung in Richtung Treibdüse (Abb. 10, Kurven 4—6). Die Pitotdrucke zu den Kurven 5 und 6 zeigen Expansion bis zum Ort des sprunghaften Anstieges des statischen Druckes. Im weiteren Verlauf der Staudüse bleiben die statischen Drucke dann konstant. Im Gegensatz zu der oben diskutierten Kurve 4 konnte bei den Kurven 5 und 6 weder ein Anstieg des Pitotdruckes an irgendeiner Stelle der Staudüse festgestellt werden, noch ein wesentliches Abfallen des statischen Druckes hinter dem sprunghaften Anstieg. Daß es sich um einen echten Drucksprung handelt, ist daraus zu ersehen, daß bei Verschieben der Sonde um wenige Millimeter der statische Druck von seinem Minimalwert bis nahezu auf seinen Endwert steigt. Eine Messung von Zwischenwerten war nicht möglich. In Kurve 6 sind statischer Druck und Pitotdruck hinter dem Drucksprung einander gleich und weichen auch nicht mehr im weiteren Verlauf der Strömung voneinander ab. Daraus ist zu schließen, daß vor dem Drucksprung Überschallströmung, hinter dem Sprung Unterschallströmung vorlag. Dieses Verhalten ist — wie oben und in Mitteilung III gezeigt — charakteristisch für gerade Verdichtungsstöße.

In Mitteilung III Abb. 1.2 ist für die Drucke, die im Fall der Kurve 6 vorliegen, die Strömungskonstruktion ausgeführt. Es ergibt sich dort ein gerader Verdichtungsstoß, der als rotationsparaboloidähnliche Fläche im Eingang der Staudüse liegt. Eine entsprechende Erscheinung konnte auch beobachtet werden (vgl. Mitteilung III Abb. 3.3 und Abb. 3.4).

Zum Vergleich sind in Abb. 12 die gemessenen und die aus der Konstruktion entnommenen Drucke wiedergegeben. Es ergibt sich wieder ebenso wie bereits in Mitteilung III die keineswegs triviale Tatsache, daß weitgehende Übereinstimmung zwischen den in der rotationssymmetrischen Anordnung gemessenen und den in ebener Näherung berechneten Drucken herrscht.

Genauere Aussagen über die Breite der Stoßfront sind aufgrund von Messungen mit den hier verwen-

sten Sonden nicht möglich. Das Auflösungsvermögen der Sonde ist nämlich gegeben durch die Durchmesser der Meßbohrungen, die gemäß Konstruktion der Sonde größer als die freie Weglänge sein müssen. Da die Breite der Stoßfront ebenfalls nur in der Größenordnung der freien Weglänge, jedenfalls nicht erheblich höher liegt, folgt, daß die Sonden für derartige Untersuchungen ungeeignet sind.

Wegen der großen Bedeutung der geraden Verdichtungsstöße für die Vorvakuumfestigkeit der Dampfstrahlpumpen [2] sei hier nochmals eine einfache Methode zur Ermittlung des Drucksprunges und damit des Ruhedruckverlustes im geraden Stoß am vorliegenden Fall erläutert. Die Expansion des Strahles ist gemäß Gl. (1) in Mitteilung III gegeben durch den kritischen Treibdüsenquerschnitt und den Staudüsenquerschnitt an der Stelle, an der der Strahl eintritt. Im vorliegenden Fall bedeutet das mit $F^*/F = 25 \cdot 10^{-2}$ eine Expansion $p/p_0 = 2,65 \cdot 10^{-3}$ auf 11 Torr. Hieraus kann der Ruhedruckverlust im geraden Stoß (Abb. 1) berechnet werden. Es ergibt sich $p_0/p_0 = 4,1 \cdot 10^{-2}$ oder ein Druck im Vorvakuumraum von 1,65 Torr. In Abbildung 13 sind die Berechnung der Expansion und des Ruhedruckverlustes zu einer Kurve zusammengefaßt, die den Ruhedruckverlust als Funktion des Flächenverhältnisses angibt.

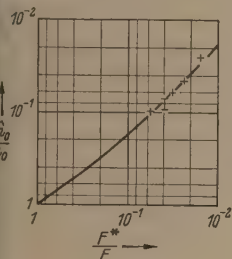


Abb. 13. Berechnung der Kompression und des Ruhedruckverlustes im geraden Verdichtungsstoß aus der Geometrie der Düsenanordnung ($\alpha = 1,1$).

Es sei noch auf die Übereinstimmung der hier berechneten Werte mit Abb. 12 hingewiesen.

Ebenso wie im vorigen Abschnitt für schräge Verdichtungsstöße erhalten wir auch hier für gerade Stöße Übereinstimmung zwischen den theoretisch gewonnenen Aussagen und den Druck- und Geschwindigkeitsmessungen in der Mittellinie der Versuchsanordnung. Damit ist gleichzeitig die Richtigkeit der Deutung der beobachteten Strahlstruktur in Mitteilung III für diesen Fall bestätigt.

d) Ausströmung aus einer Lavaldüse bei nahezu gleichem Mündungsdruck und Gegendruck.

Die bisher besprochenen Strömungsvorgänge sind charakterisiert durch einen Überschallstrahl, der unter einem großen Winkel aus der Treibdüse austritt und den Hochvakuumraum gegen Einwirkungen vom Vorvakuumraum her völlig absperrt. Dabei wurde nicht berücksichtigt, daß sich an den Staudüsenwänden eine ruhende Grenzschicht bilden und Gas aus dem Vorvakuumraum in den Hochvakuumraum zurückströmen kann. Das gilt besonders für den im vorigen Abschnitt besprochenen Fall. Diese Vernachlässigung einer evtl. vorhandenen Grenzschicht kann dadurch gerechtfertigt werden, daß die Staudüsenwände gekühlt sind und somit die Grenzschicht durch Kondensation von Öldampf abgesaugt wird.

Es wurde jetzt, ausgehend von dem letztbesprochenen Fall, der Gaseinlaß an der Hochvakuumseite ein wenig erhöht. Damit wurde zwangsläufig auch der Vorvakuumdruck erhöht, und zwar über den Wert hinaus, der sich gemäß Abb. 1 aus der Strahlexpan-

sion ergab, die ihrerseits durch die Geometrie der Anordnung bestimmt war, wie oben diskutiert wurde. Um Kompression über einen geraden Stoß weiterhin zu ermöglichen, müßte die Expansion verringert werden. Das hat bei der vorliegenden Anordnung zur Folge, daß der Strahl die Staudüsenwand nicht mehr erreicht. Es tritt Gasrückströmung aus dem Vorvakuumraum in den Hochvakuumraum ein und damit Druckangleich. Durch den Druckanstieg im Hochvakuumraum wird der Winkel, unter dem der Strahl die Treibdüse verläßt, verkleinert (vgl. Abb. 3.5 in Mitteilung III).

Entsprechend dem eben Gesagten wurde hier eine Expansion des Strahles bis 1,4 Torr (statischer Druck) gemessen und anschließend langsame Kompression auf 2,5 Torr (Abb. 10, Kurve 7). Der Pitot-Druck sank bis 2,3 Torr und stieg dann wieder an bis 2,6 Torr.

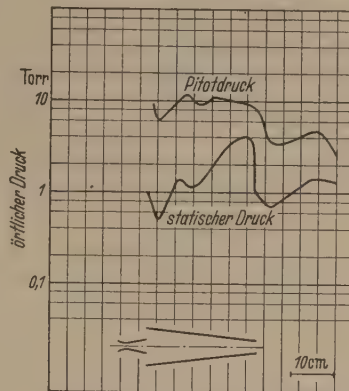


Abb. 14. Sondenmessungen bei gleichem Druck im Hochvakuum- und Vorvakuumraum (1,2 Torr).

Bei weiterem Gaseinlaß war keine prinzipielle Änderung dieses Zustandes mehr meßbar. Im hier vorliegenden Fall wurde eine langsame Kompression in der Staudüse gemessen und nicht ein sprunghafter Druckanstieg, wie oben. Bei der Expansion in der Treibdüse und im ersten Teil der Staudüse wurden Pitot-Drucke gemessen, die auch aufgrund der Theorie und der gemessenen statischen Drucke zu erwarten sind. Mit Beginn der Kompression wurden aber die gemessenen Pitot-Drucke kleiner, als zu erwarten war. Es konnte also auch hier keine rein adiabatische Kompression des Dampfes vorliegen. Die Verhältnisse wurden dadurch unübersichtlich, daß gemäß Mitteilung II eine Eindringtiefe des Gases in den Dampfstrahl berechnet werden kann, die in der gleichen Größenanordnung liegt wie der Strahlquerschnitt und daß außerdem zwischen Strahl und Staudüsenwänden eine breite Schicht lag, in der Gas aus dem Vorvakuumraum in den Hochvakuumraum — dem Druckgradienten folgend — zurückströmte, wie auch am Kondensat beobachtet werden konnte.

Die Rückströmung kann weitgehend ausgeschaltet werden, wenn die Drucke im Hochvakuum- und Vorvakuumraum gleich sind. Dies wurde dadurch erreicht, daß der Hochvakuumraum mit dem Vorvakuumraum durch eine Umwegleitung verbunden wurde. Bei 1,2 Torr wurde der Druckverlauf gemessen, der in Abb. 14 wiedergegeben ist. Der Strahl expandiert zuerst bis 0,5 Torr, also wesentlich weiter, als dem „Hochvakuumdruck“ entspricht, wie aufgrund der Konstruktion zu erwarten. Dann folgt adiabatische Kompression und anschließend wieder Expansion bis

1,1 Torr. Bis hierhin stimmt der gemessene Pitotdruck genau mit dem über Abb. 1 aus dem statischen Druck bestimmten überein. Bei dem nun folgenden steilen Anstieg des statischen Druckes bleibt der Pitotdruck nahezu konstant. Die Kompression führt am Staudüsenausgang auf einen wesentlich höheren als den eingestellten Druck im Vorvakuumraum. Daher erfolgt hinter der Staudüse erneute Expansion.

Die aufeinander folgenden gemessenen Expansionen und Kompressionen — teilweise verbunden mit schrägen Verdichtungsstößen — ergeben sich in ähnlicher Weise aus den entsprechenden Strömungskonstruktionen. Es müssen im vorliegenden Fall gewisse Differenzen in Kauf genommen werden, da die Konstruktion die — wenn auch hier indirekte — Beeinflussung durch die Staudüsenwände nicht berücksichtigen kann. Ebenso wurde bei der Konstruktion der Einfluß der Durchmischung nicht einkalkuliert.

Auf eine genauere Untersuchung der genannten Punkte wird hier verzichtet, da zur Beantwortung der Frage nach der Gültigkeit der Gasdynamik der vorliegende Fall nur geringe Bedeutung hat im Gegensatz zu den Vorgängen bei niedrigen Drucken, auf deren Untersuchung die angewendeten experimentellen Methoden abgestimmt sind.

Zusammenfassung.

Eine Spezialsonde ermöglicht Druck- und Geschwindigkeitsmessungen in der Mittellinie einer ro-

tationssymmetrischen Öldampfströmung bei Überschallgeschwindigkeit. Anhand dieser Messungen kann das Bild der Strömungsvorgänge überprüft werden, das auf gasdynamischen Berechnungen und Konstruktionen einerseits und durch direkte Strömungsbeobachtung andererseits gewonnen wurde, vgl. Mitteilung III. Damit folgt gleichzeitig eine Prüfung der Frage, ob im untersuchten Druckbereich die Gasdynamik noch angewendet werden darf.

Die Messungen ergeben innerhalb der Meßgenauigkeit Übereinstimmung mit den theoretisch erwarteten Vorgängen.

Für die Anregung zu den in Mitteilung III und IV zusammengefaßten Arbeiten bin ich Herrn Prof. JAECKEL und Herrn Dr. NÖLLER zu Dank verpflichtet. Ferner gilt mein Dank für materielle und apparative Unterstützung dem Forschungsrat des Landes Nordrhein-Westfalen sowie den Firmen E. Leitz, Wetzlar, Agfa Kamarawerke München und E. Leybold, Nachf. Köln.

Literatur. [1] ALEXANDER, P.: J. scient. instr. **23**, 11 (1946). [2] JAECKEL, R., H. G. NÖLLER u. H. KUTSCHER: Vakuumtechnik **3**, 1 (1954).

Weitere Literaturangaben in Mitteilung I bis III: Z. angew. Phys. **7**, 218, 225 u. 229 (1955).

Dr. HORST KUTSCHER,

Physikalisches Institut der Universität Bonn,
Abteilung Vakuum.

Bemerkung zur Temperaturabhängigkeit des Sperrstromes bei $p-i-n$ -Gleichrichtern.

Von ADOLF HERLET.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 8. September 1954.)

Einleitung.

Der SHOCKLEYSche $p-n$ -Gleichrichter [1] ist dadurch charakterisiert, daß innerhalb eines einkristallinen Germaniumbereiches ein Übergang von überschußleitendem n -Germanium zu defektleitendem p -Germanium durch Dotierung mit geeigneten Zusatzstoffen erzeugt wird. Kennzeichnend für diesen Gleichrichtertyp ist, daß der Übergang von dem p -Gebiet zum n -Gebiet in einem gegenüber den Gleichrichterdimensionen *schmalen* Bereich erfolgt (Abb. 1).

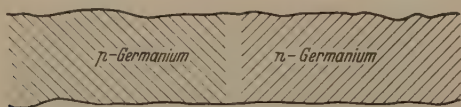


Abb. 1. $p-n$ -Gleichrichter (schematisch).

In den letzten Jahren wurde von R. N. HALL und W. C. DUNLAP Jr. [2] ein verwandter Gleichrichtertyp entwickelt, der sich vom $p-n$ -Gleichrichter dadurch unterscheidet, daß bei ihm ein hochdotiertes n -Gebiet von einem hochdotierten p -Gebiet durch ein *breites* eigenleitendes (intrinsic) Gebiet von einigen 100 μ Dicke getrennt ist ($p-i-n$ -Gleichrichter, Abb. 2).

Beiden Gleichrichtertypen ist gemeinsam, daß bei Polung in Flußrichtung Elektronen und Defektelektronen aus den hochdotierten Gebieten in die Gleich-

richtermitte geschwemmt werden und sich dort gegenseitig durch Rekombination vernichten, während bei Polung in Sperrrichtung die in der Gleichrichtermitte neu erzeugten Teilchen nach beiden Seiten hin abgesaugt werden. Daraus folgt sofort der Sättigungscharakter des Sperrstromes; denn auch bei fortgesetzter Steigerung der Sperrspannung können aus der Gleichrichtermitte nicht mehr Teilchen abgesaugt werden, als die Neuerzeugung in einem noch näher zu kennzeichnenden Volumen V liefert. Dieses

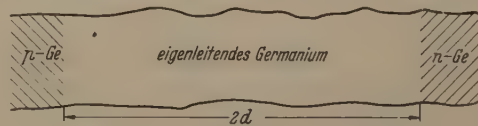


Abb. 2. $p-i-n$ -Gleichrichter (schematisch).

fragliche Volumen V bestimmt sich beim $p-i-n$ -Gleichrichter einfach durch die geometrischen Abmessungen der mittleren i -Zone, beim $p-n$ -Gleichrichter durch den mikroskopischen Gegenprozeß zur Paarbildung, durch die Rekombination¹. Wir können demnach allgemein setzen

$$I_S = e \cdot g \cdot V. \quad (1)$$

¹) Die Dicke der Schicht, aus der die Neuerzeugung abgesaugt werden kann, ist dann durch die „Diffusionslänge L “ begrenzt.

Die thermische Paarerzeugung g ist stark temperaturabhängig. Da der Paarerzeugungsprozeß in dem Übergang eines Elektrons vom Valenzband ins Leitungsband besteht, liegt es nahe, für die Paarerzeugung $g(T)$ und damit für den Sättigungsstrom $I_S(T)$ eine Gesetz-mäßigkeit

$$I_S(T) \sim g(T) \sim e^{-\frac{E_{CV}}{kT}} \quad (2)$$

zu erwarten, wobei E_{CV} die Energiedifferenz $E_C - E_V$ zwischen Valenz- und Leitungsband bedeutet. Experimentell hat sich aber gezeigt, daß man für $I_S(T)$ war ein Exponentialgesetz der angegebenen Form erhält, jedoch stets mit einer Energieschwelle

$$E < E_{CV}. \quad (3)$$

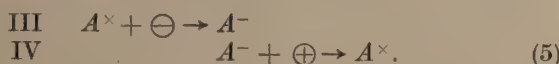
Zu dieser scheinbaren Diskrepanz ist zu bemerken, daß die naheliegende Erwartung (2) nicht ohne weiteres berechtigt ist, denn die Paarerzeugung dürfte häufig nicht ein einfacher Vorgang, sondern komplexer Natur sein, d. h. über Zwischenstufen verlaufen. Zu diesen Einzelschritten der Paarerzeugung gehören aber Energieschwellen, die kleiner als der volle Bandabstand E_{CV} sind, und es soll im folgenden gezeigt werden, daß schon aus diesem Grunde eine schwächere Temperaturabhängigkeit als Gl. (2) für den Sperrstrom erwartet werden muß.

Die Paarerzeugung nach einem Trap-Modell.

SHOCKLEY und READ [3] einerseits und R. N. HALL [4], andererseits haben über ein Modell berichtet, bei dem die Rekombination und die Paarerzeugung im wesentlichen nur unter Wechselwirkung mit gewissen Akzeptor-Störstellen, den sog. Traps, zustandekommen. Dieses Modell scheint in guter Übereinstimmung mit den bisherigen experimentellen Erfahrungen zu sein [4, 5]. Danach besteht z. B. ein Paarerzeugungsprozeß aus zwei Schritten (Abb. 3):



Der Gegenprozeß zur Paarbildung, die Rekombination, verläuft nach diesem Modell in den Einzelschritten (Abb. 3):



Während die Häufigkeit der Prozesse I und II nur von den Trap-Konzentrationen n_{A^+} und n_{A^-} abhängt, erkennt man aus Gl. (5), daß die Zahl der Prozesse III und IV im Gegensatz zu I und II auch von den Konzentrationen n und p der Elektronen \ominus und Defektelektronen \oplus abhängig ist. So ist z. B. beim Fehlen jeglicher Elektronen ($n = 0$) kein Reaktionspartner für die neutralen Traps A^+ vorhanden und der Prozeß III kann nicht stattfinden. Entsprechend kann bei $p = 0$ die Reaktion IV nicht ablaufen.

Mit Hilfe dieses Modells erhalten SHOCKLEY und READ für die Paarerzeugung die Beziehung

$$g = \frac{n_i^2}{\tau_{p0}(n + n_1) + \tau_{n0}(p + p_1)} \quad (6)$$

Die Inversionsdichte n_i ist dabei die Gleichgewichtskonzentration der Elektronen und Defektelektronen im eigenleitendem Material. Für n_i gilt mit Hilfe der „effektiven Zustandsdichten“ N_C und N_V die Be-

ziehung¹:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_{CV}}{2kT}}. \quad (7)$$

Weiter sind in Gl. (6) die Größen n_1 und p_1 diejenigen Konzentrationen, die die Elektronen des Leitungsbandes bzw. die Defektelektronen des Valenzbandes im thermischen Gleichgewicht annehmen würden, wenn das FERMI-Niveau im Trap-Niveau läge. n_1 und p_1 werden also durch die Lage des Trap-Niveaus E_T bestimmt und sind stark temperaturabhängig. Es gilt

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = N_C e^{-\frac{E_C - E_T}{kT}} \\ p_1 = N_V e^{-\frac{E_T - E_V}{kT}} \end{array} \right\} \text{ und } p_1 \cdot n_1 = n_i^2. \quad (8)$$

Schließlich sind die Größen τ_{p0} und τ_{n0} Zeitkonstanten, die von der Zahl der Traps und vom Einfangsquerschnitt der Traps gegenüber Defektelektronen bzw. Elektronen abhängen. Sie können im wesentlichen als temperaturunabhängig angesehen werden.

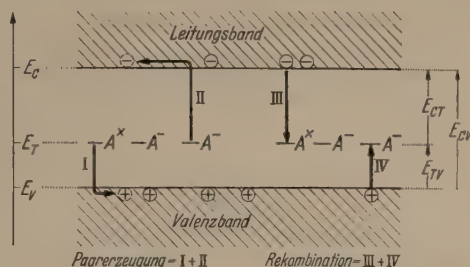


Abb. 3. Das Trap-Modell der Paarerzeugung und Rekombination.

Durch Einsetzen von Gl. (7) und (8) in (6) erhält man für die Paarerzeugung:

$$g(T) = \frac{N_C \cdot N_V \cdot e^{-\frac{E_{CV}}{kT}}}{\tau_{p0} \cdot n + \tau_{n0} \cdot p + \tau_{p0} N_C e^{-\frac{E_{CT}}{kT}} + \tau_{n0} N_V e^{-\frac{E_{TV}}{kT}}}. \quad (9)$$

Durch Vergleich mit Gl. (2) sieht man, daß der Anstieg von g mit T wegen der temperaturabhängigen Glieder im Nenner stets langsamer verläuft als nach Gl. (2).

Paarerzeugung und Sättigungsstrom beim $p-i-n$ -Gleichrichter mit streng eigenleitender Mittelzone.

Beim $p-i-n$ -Gleichrichter werden sowohl die Elektronen- wie die Defektelektronenkonzentration bei genügend hoher Sperrbelastung ($\gtrsim 1$ Volt) im gesamten Mittelgebiet (Dicke $2d$) stark abgesenkt, dieses also von Stromträgern leergesaugt [7, 8]:

$$n \ll n_i \text{ und } p \ll n_i \text{ im Mittelgebiet.} \quad (10)$$

Dadurch werden dort die Reaktionen III und IV, d. h. also die Rekombinationsvorgänge unterdrückt. Der Gegenprozeß zur Paarbildung entfällt also praktisch im ganzen Mittelgebiet, das dadurch zum wirk-samen Paarerzeugungsvolumen beim $p-i-n$ -Gleich-richter wird²

$$V = 2d \cdot A. \quad (11)$$

¹ Siehe hierzu [6] Kap. VIII § 4 und 5.

² Einen gewissen Beitrag zur Paarerzeugung leisten auch noch die beiden hochdotierten Gebiete. Dieser Anteil am Sättigungsstrom ist allerdings verschwindend gering.

Hierbei bedeutet A die Gleichrichterfläche (Area). Damit und nach (1) wird die Sättigungsstromdichte:

$$i_S = \frac{I_S}{A} = e \cdot 2d \cdot g(T). \quad (12)$$

Die bei genügend hoher Sperrbelastung auftretende Unterdrückung der Reaktionen III und IV hat die weitere Folge, daß die Prozesse I und II gleich häufig werden. Im stationären Zustand, bei einer fest vorgegebenen Sperrspannung also, muß sich ja ein festes Verhältnis $n_{A^-} : n_{A^+}$ einstellen. Dies ist nur möglich, wenn die Zahl der Geburten von A^- (Reaktion I) gleich der Zahl der Todesfälle von A^- (Reaktion II) ist¹. Dann wird:

$$g(T) = Z_I = \frac{\text{Zahl der Reaktionen I}}{\text{cm}^{-3} \text{ sec}} = \frac{\text{Zahl der Reaktionen II}}{\text{cm}^{-3} \text{ sec}} = Z_{II}. \quad (13)$$

Für Z_I und Z_{II} gelten nun die Ansätze:

$$Z_I = c_I \cdot n_{A^+} \cdot e^{-\frac{E_{TV}}{kT}}. \quad (14)$$

$$Z_{II} = c_{II} \cdot n_{A^-} \cdot e^{-\frac{E_{CT}}{kT}}. \quad (15)$$

Die Konstanten c_I und c_{II} sind annähernd temperaturunabhängig und von gleicher Größenordnung². Wenn nun z.B. wie bisher experimentell stets gefunden, das Trap-Niveau E_T deutlich unterhalb der Bandmitte liegt [4, 5]:

$$E_{TV} < E_{CT},$$

so gilt für die beiden Exponentialfaktoren in (14) und (15)

$$e^{-\frac{E_{TV}}{kT}} \gg e^{-\frac{E_{CT}}{kT}},$$

und damit wegen $Z_I = Z_{II}$

$$n_{A^+} \ll n_{A^-} \approx n_A, \quad (16)$$

wenn n_A die Gesamtkonzentration der (geladenen + ungeladenen) Traps bedeutet. n_A ist seiner Bedeutung nach temperaturunabhängig. Das wird von Bedeutung, wenn wir (16) in (15) und das wiederum in (13) einsetzen:

$$g(T) = Z_{II} = c_{II} \cdot n_A \cdot e^{-\frac{E_{CT}}{kT}}. \quad (17)$$

Hiermit erhalten wir für die Sperrstromdichte (12) schließlich

$$i_S = 2 \cdot e \cdot d \cdot c_{II} \cdot n_A \cdot e^{-\frac{E_{CT}}{kT}}. \quad (18)$$

¹ Diese Überlegungen gelten natürlich nicht bei hochfrequenten Wechselstrombelastungen, bei denen die Reaktionen I bis IV nicht mehr quasistationär verlaufen.

² Durch einen Vergleich der Reaktionen I und IV bzw. II und III im thermischen Gleichgewicht (keine Strombelastung) erhält man:

$$c_I = \sigma_{A^-} \cdot v_{thp} \cdot N_V \quad c_{II} = \sigma_{A^+} \cdot v_{thn} \cdot N_C \quad (19)$$

wobei σ_{A^-} und σ_{A^+} den Wirkungsquerschnitt von A^- -Störstellen gegenüber den Defektelektronen bzw. von A^+ -Störstellen gegenüber den Elektronen bedeuten. v_{thp} und v_{thn} sind die thermischen Geschwindigkeiten von Defektelektronen und Elektronen und N_V und N_C sind schließlich die effektiven Zustandsdichten (Entartungskonzentrationen) im Valenz- bzw. Leitungsband. Die im Vergleich zu den Exponentialfaktoren schwachen Temperaturabhängigkeiten der Größen v_{thn} , v_{thp} , N_C und N_V dürfen zunächst einmal außer acht gelassen werden.

Ansichts der Temperaturunabhängigkeit von n_A wird also der Temperaturgang von i_S durch die Energiedifferenz E_{CT} bestimmt (also durch die Größere der beiden Energieschwellen E_{CT} und E_{CV}). Den flachsten Temperaturanstieg von i_S erhält man für

$$E_{CT} \approx E_{TV} \approx \frac{1}{2} E_{CV} \quad (\text{siehe Fußnote 1}).$$

Das gleiche Ergebnis liefert selbstverständlich eine formale Diskussion der Gl. (9). Hier können wir wegen (10) und (8) die Glieder $\tau_{p0} \cdot n$ und $\tau_{n0} \cdot p$ vernachlässigen. (Das entspricht der Vernachlässigung der Reaktionen III und IV.)

Wir erhalten dann mit (12):

$$i_S = 2 \cdot e \cdot d \cdot \frac{N_C \cdot N_V e^{-\frac{E_{CV}}{kT}}}{N_C \tau_{p0} e^{-\frac{E_{CT}}{kT}} + N_V \tau_{n0} e^{-\frac{E_{TV}}{kT}}}. \quad (20)$$

Welcher der beiden Summanden im Nenner überwiegt, hängt sowohl von der Lage des Trap-Niveaus als auch von dem Verhältnis $N_C \cdot \tau_{p0} : N_V \cdot \tau_{n0}$ ab. Da die Exponentialglieder jedoch sehr stark von der Lage des Trap-Niveaus abhängen, wird im allgemeinen der Summand mit der niedrigeren Energieschwelle im Exponenten überwiegen³. Liegt z.B. das Trap-Niveau deutlich unterhalb der Bandmitte, so ist $E_{CT} > E_{TV}$ und es überwiegt der 2. Summand

$$i_S = 2 \cdot e \cdot d \cdot \frac{N_C}{\tau_{n0}} e^{-\frac{E_{CV}}{kT}} = 2 \cdot e \cdot d \cdot \frac{N_C}{\tau_{n0}} e^{-\frac{E_{CT}}{kT}}. \quad (21)$$

Ein Vergleich von (18) mit (21) ergibt im übrigen

$$\tau_{n0} = \frac{1}{c_{II}} \cdot \frac{N_C}{n_A} = \frac{1}{\sigma_{A^+} \cdot v_{th} \cdot n_A}. \quad (22)$$

Paarerzeugung und Sättigungsstrom bei schwach dotierter Mittelzone.

Die vorstehenden Überlegungen gelten streng nur für eine ideal eigenleitende Mittelzone³. Schon bei schwacher Dotierung der Mittelzone kann die Situation wesentlich komplizierter werden. Hier dürfen wir je nach Dotierung entweder das Glied $\tau_{p0} \cdot n$ oder das Glied $\tau_{n0} \cdot p$ im Nenner von (6) bzw. (9) nicht mehr vernachlässigen. Außerdem kann das Paarerzeugungsvolumen temperaturabhängig werden. Beide Effekte wirken sich dahin aus, daß der Sättigungsstrom, wenig-

¹ Sofern man von größenordnungsmäßigen Unterschieden der beiden Konstanten c_I und c_{II} absieht.

² Die Faktoren $N_C \cdot \tau_{p0}$ und $N_V \cdot \tau_{n0}$ sind wieder wie c_I und c_{II} in (14) und (15) von gleicher Größenordnung.

³ Dies wäre z. B. der Fall, wenn die Raumladung der am Paarerzeugungsprozeß beteiligten Traps exakt durch die Raumladung von entgegengesetzt geladenen Störstellen kompensiert würde, die nicht (oder nur unwesentlich) am Rekombinationsmechanismus mitwirken. Nehmen wir allgemeiner an, daß in der Mittelzone eine Reihe von Störstellensorten $A_1, A_2, \dots, D_1, D_2, \dots$ vorhanden sind. Die von allen diesen Störstellensorten allein ohne die Elektronen und ohne die Defektelektronen erzeugte Raumladung ist:

$$|e_0| = e \cdot \left| \sum_z n D_z^+ - \sum_z n A_z^- \right|.$$

Die Voraussetzungen für die oben dargestellten Betrachtungen sind noch hinreichend gewährleistet, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & |e_0| \ll e n_i, \\ \text{b)} \quad & U_{sp} > \frac{4\pi}{e} \frac{q_0}{2} (2d)^2. \end{aligned}$$

(Siehe hierzu [8] Kap. VII Abschnitt 4).

Zur Erläuterung von Bedingung b) sei bemerkt, daß auf der rechten Seite diejenige Spannung steht, die man mit der Raumladungsdichte q_0 allein maximal in der Mittelzone aufbauen kann.

ens in bestimmten Temperaturbereichen stärker mit der Temperatur ansteigt als bei streng eigenleitender Mittelzone. Man erhält daher Energieschwellen, die von E_{CT} (bei hohen Temperaturen) bis zur vollen Bandbreite E_{CV} (bei niedrigen Temperaturen) variieren können.

Bei genügend hoher Dotierung¹ der Mittelzone wirkt der „ $p-i-n$ -Gleichrichter“ bei Sperrbelastung wie ein $p-n$ -Gleichrichter mit stark unsymmetrischer Dotierung. Die Sperrspannung wird in einem schmalen Raumladungsgebiet zwischen hochdotiertem p -Gebiet und Mittelgebiet aufgefangen². Im Innern des Mittelgebietes wird der Minoritätsstrom als Diffusionsstrom geführt. Sofern man die Paarerzeugung in dem schmalen Raumladungsgebiet vernachlässigt³, erhält man als Sättigungssperrstrom⁴

$$I_S = e p_n \cdot \frac{L_p}{\tau_p} \mathfrak{R} g \frac{2d}{L_p} \cdot A. \quad (23)$$

p_n = Gleichgewichtskonzentration
 τ_p = Lebensdauer
 L_p = Diffusionslänge

der Defektelektro-
nen im (n -dotierten)
Mittelgebiet.

Dabei sind τ_p und L_p definiert durch die vom $p-n$ -Gleichrichter der bekannten Beziehungen:

$$\tau_p = \frac{p - p_n}{g}; \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p}. \quad (24)$$

{ \mathfrak{R} = Rekombinationsüberschuß = Zahl der Rekombinationsprozesse — Zahl der Paarerzeugungsprozesse ($\text{cm}^{-3} \text{sec}^{-1}$)}.

Da im Gebiet starker Absenkung der Defektelektronenkonzentration ($p \ll p_n$) die Rekombinationsprozesse verschwinden ($\mathfrak{R} = -g$), können wir statt (24) auch schreiben

$$\tau_p = \frac{p_n}{g}. \quad (25)$$

¹ . . . , d. h., wenn keine der beiden Bedingungen in Fußnote 3, S. 242 rechts erfüllt ist.

² Wir betrachten im folgenden den Fall einer n -Dotierung der Mittelzone. Siehe im übrigen hierzu Bild 31 aus [8].

³ Wenn die Mittelzonendotierung n_{D+m} sehr groß gegenüber der Inversionsdichte n_i ist, wie dies z. B. bei Siliziumgleichrichtern mit ihrem niedrigen n_i -Wert ($= 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$) meistens der Fall sein dürfte, kann die Paarerzeugung im Raumladungsgebiet bedeutsam oder sogar entscheidend werden. Dies tritt vor allem dann ein, wenn das Trapniveau nahe der Bandmitte liegt. In dem SHOCKLEY-READSchen Ausdruck (6), in dem immer τ_{n0} und τ_{p0} von gleicher Größenordnung sein dürften, ist dann nämlich $p_1 = n_1 = n_i$ und man erhält für das Innere des Mittelgebietes ($n = n_{D+m} \gg p$) die spezifische Neuerzeugung $g = \frac{n_i^2}{\tau_{p0} n_{D+m}}$, während in der Raumladungszone $p \ll n_i$ und $n \ll n_i$ ist und $g = \frac{n_i}{\tau_{n0} + \tau_{p0}}$ wird.

Für das Verhältnis der spezifischen Neuerzeugungen ergibt sich also $\frac{n_{D+m}}{n_i} \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0} + \tau_{p0}}$, so daß wegen $n_{D+m} \gg n_i$ bei nicht allzu schmaler Raumladungszone die dortige Neuerzeugung bedeutsam werden kann.

Im übrigen liegen in der Raumladungszone dieselben Verhältnisse vor wie bei streng eigenleitendem Mittelgebiet in der gesamten Mittelzone. Sofern also die Paarerzeugung in der Raumladungszone entscheidend wird, erhält man die gleiche Temperaturabhängigkeit des Sperrstromes, wie bei streng eigenleitender Mittelzone. Im Gegensatz zum $p-i-n$ -Gleichrichter mit streng eigenleitender Mittelzone erhält man jedoch keinen Sättigungsstrom mehr, sondern mit wachsender Sperrspannung wächst die Breite der Raumladungszone an und damit auch der Sperrstrom. Vgl. dazu die inzwischen erschienene Arbeit [9] über $p-n$ -Gleichrichter aus Silizium.

⁴ Vgl. [4] und [8] Kap. VII Abschn. 3.

Damit geht (23) über in

$$I_S = e \cdot g \cdot L_p \cdot \mathfrak{R} g \frac{2d}{L_p} \cdot A \quad (26)$$

und wir erhalten durch Vergleich mit (1) für das Paarerzeugungsvolumen:

$$V = L_p \cdot \mathfrak{R} g \frac{2d}{L_p} \cdot A. \quad (27)$$

Hier können wir zwei Grenzfälle unterscheiden, je nachdem ob im betrachteten Temperaturbereich die Breite $2d$ der Mittelzone groß ist gegenüber der Diffusionslänge L_p oder umgekehrt.

a) $2d \ll L_p$.

Dann wird V wie bei exakt eigenleitender Mittelzone temperaturunabhängig durch (11) bestimmt.

$$V = 2d \cdot A \quad (11)$$

und es gilt wieder

$$I_S(T) \sim g(T).$$

Bei der Berechnung von $g(T)$ müssen wir jetzt allerdings berücksichtigen, daß außerhalb der schmalen Raumladungszone die Konzentration der Majoritätsträger nicht abgesenkt wird, sondern durch die Dotierung festgehalten wird.

$$n = n_{D+m}. \quad (28)$$

Setzen wir dies in (9) ein, vernachlässigen wir wieder das Glied $\tau_{n0} \cdot p$ und betrachten wir wieder den Fall:

$$E_{CT} > E_{TV}$$

so wird

$$I_S(T) \sim g(T) = \frac{N_C \cdot N_V \cdot e^{-\frac{E_{CV}}{kT}}}{\tau_{p0} \cdot n_{D+m} + \tau_{n0} N_V e^{-\frac{E_{CV}}{kT}}}. \quad (29)$$

Die Temperaturabhängigkeit $I_S(T)$ wird hier also verschieden sein, je nachdem ob im Nenner das 1. oder 2. Glied überwiegt. Bei den relativ niedrigen Dotierungen der Mittelzone können wir im ganzen in Frage kommenden Temperaturbereich stets mit Störstellenerschöpfung rechnen, also n_{D+m} als temperaturunabhängig ansehen. Wir erhalten dann

$$I_S(T) \sim e^{-\frac{E_{CV}}{kT}} \quad \text{für } kT < \frac{E_{TV}}{\ln \left(\frac{\tau_{n0} \cdot N_V}{\tau_{p0} \cdot n_{D+m}} \right)} \quad (30)$$

bzw.

$$I_S(T) \sim e^{-\frac{E_{CT}}{kT}} \quad \text{für } kT > \frac{E_{TV}}{\ln \left(\frac{\tau_{n0} \cdot N_V}{\tau_{p0} \cdot n_{D+m}} \right)}. \quad (31)$$

Bei tiefen Temperaturen erhält man hier also als Aktivierungsenergie die volle Bandbreite, bei hohen Temperaturen wieder wie bei undotierter Mittelzone die größere der beiden Energieschwellen zwischen Trapniveau und Leitungs- bzw. Valenzband.

b) $2d \gg L_p$.

Hier wird das Paarerzeugungsvolumen nach (27), (24) und (25)

$$V = L_p \cdot A = \sqrt{D_p \cdot \frac{p_n}{g(T)}} \cdot A \quad (32)$$

temperaturabhängig. Solange $n_{D+m} \gg n_i$ ist, d. h. solange bei gegebener Dotierung die betrachtete Tempera-

tur nicht zu hoch ist, können wir die Minoritätsträgerkonzentration p_n im thermischen Gleichgewicht durch die einfache Beziehung

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_{D^+m}} \quad (33)$$

darstellen. Damit wird nach (32)

$$V = n_i \sqrt{D_p \cdot n_{D^+m} \cdot \frac{1}{g(T)} \cdot A}. \quad (34)$$

Wenn wir die schwache Temperaturabhängigkeit von D_p vernachlässigen und n_i gemäß (7) einsetzen, wird

$$V(T) \sim e^{-\frac{E_{CV}}{2kT}} \cdot \sqrt{\frac{1}{g(T)}}. \quad (35)$$

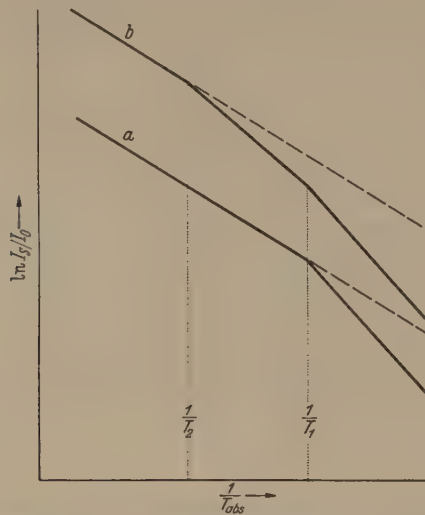


Abb. 4. Abhängigkeit des Sättigungssperrstromes I_S von der Temperatur bei einem p - i - n -Gleichrichter mit schwach dotierter Mittelzone (schematische Darstellung, I_0 = willkürliche Stromseinheit). a) schmale Mittelzone: $2a \ll L_p$; b) breite Mittelzone: $2a \gg L_p$ (Verlauf bei undotierter Mittelzone gestrichelt.)

Aus (1) erhalten wir mit (29) und (35)

$$I_S(T) \sim \frac{e^{-\frac{E_{CV}}{kT}}}{\left(\tau_{p_0} n_{D^+m} + \tau_{n_0} N_V e^{-\frac{E_{TV}}{kT}} \right)^{1/2}}. \quad (36)$$

Ein Vergleich mit (29) zeigt, daß wir hier die beiden Näherungslösungen

$$I_S(T) \sim e^{-\frac{E_{CV}}{kT}} \quad \text{für } kT < \frac{E_{TV}}{\ln\left(\frac{\tau_{n_0} \cdot N_V}{\tau_{p_0} \cdot n_{D^+m}}\right)} \quad (37)$$

und

$$I_S(T) \sim e^{-\frac{E_{CT} + \frac{1}{2} E_{TV}}{kT}} \quad \text{für } kT > \frac{E_{TV}}{\ln\left(\frac{\tau_{n_0} \cdot N_V}{\tau_{p_0} \cdot n_{D^+m}}\right)} \quad (38)$$

erhalten.

Die Grenztemperatur

$$T_1 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{E_{TV}}{\tau_{n_0} \cdot N_V}\right)$$

würde mit den bei Germanium gemessenen Werten [5]: $E_{TV} \approx 0,24$ eV, $\tau_{n_0} > \tau_{p_0}$, bei einer Mittelzonen-dotierung: $n_{D^+m} \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3} \approx 10^{-5} \cdot N_V$ noch unterhalb Zimmertemperatur liegen, denn es ist

$$\frac{0,24 \text{ eV}}{\ln(10^5)} = 0,01 \text{ eV} < 0,026 \text{ eV} = k \cdot 300^\circ \text{ K}.$$

Bei Temperaturen weit über Zimmertemperatur wird schließlich $n_i > n_{D^+m}$ und wir erhalten wieder die Beziehung (17) für eine undotierte Mittelzone¹. Die Grenztemperatur für diesen Übergang ist:

$$T_2 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{E_{CV}}{N_C \cdot N_V}\right)$$

In Abb. 4 ist die Temperaturabhängigkeit des Sättigungsstromes schematisch für eine schmale und eine breite Mittelzone dargestellt. Der Verlauf bei streng eigenleitender Mittelzone ist dabei jeweils gestrichelt eingezeichnet. Die Temperaturabhängigkeiten von N_C , N_V , τ_{n_0} , τ_{p_0} , D_p , und der Energiedifferenzen E_{CV} , E_{CT} und E_{TV} sind dabei — wie in der gesamten Darstellung — nicht berücksichtigt.

Zusammenfassung.

Die Temperaturabhängigkeit des Sperrstromes von p - i - n -Gleichrichtern wird diskutiert. Dabei wird für die Rekombination und Paarerzeugung das Trap-Modell von SHOCKLEY-READ und R. N. HALL zugrunde gelegt.

Mit Hilfe dieses Modells läßt sich die Erfahrung deuten, daß bei Flächengleichrichtern mit breiter eigenleitender Mittelzone in dem bekannten exponentiellen Temperaturgang des Sperrstromes

$$I_S = a e^{-\frac{E}{kT}}$$

im allgemeinen die Aktivierungsenergie *kleiner* als die Bandbreite ist:

$$E < E_{CV}.$$

Ein einfaches Exponentialgesetz erhält man nur bei rein eigenleitender Mittelzone des Gleichrichters. Bei schwacher Dotierung der Mittelzone kann die Aktivierungsenergie in verschiedenen Temperaturbereichen unterschiedlich sein.

Herrn Dr. E. SPENKE und Herrn Dr. A. HOFFMANN danke ich für aufschlußreiche Diskussionen zum Trapmodell.

Literatur. [1] SHOCKLEY, W.: Bell Syst. Techn. J. 28, 435 (1949). — GOUCHER, F. S., G. L. PEARSON, W. SPARKS, G. K. TEAL u. W. SHOCKLEY: Phys. Rev. 81, 637 (1951). — [2] HALL, R. N. and W. C. DUNLAP, JR.: Phys. Rev. 80, 468 (1950); HALL, R. N.: Proc. I. R. E. 40, 1512 (1952). — [3] SHOCKLEY, W. and W. T. READ, JR.: Phys. Rev. 87, 835 (1952). — [4] HALL, R. N.: Phys. Rev. 87, 387 (1952). — [5] BURTON, J. A., G. W. HULL, F. J. MORIN and J. C. SEVERIENS: J. Phys. Chem. 57, 853 (1953). — [6] SPENKE, E.: Elektronische Halbleiter Springer-Verlag 1955). — [7] PRIM, R. C.: The Bell System Techn. Journ. 32, 665 (1953). — [8] HERLET, A. und E. SPENKE: Z. angew. Physik 7, 99, 149 u. 195 (1955). — [9] KLEINKNECHT, H. und K. SEILER: Z. Physik 139, 599 (1954).

Dr. ADOLF HERLET, Siemens-Schuckertwerke A.G.,
Laboratorium Pretzfeld.

¹ Vgl. Fußnote 3, S. 242 rechts.

Zum theoretischen Temperaturkoeffizienten von Halbleitern.

VON EBERHARD GROSCHWITZ.

(Eingegangen am 8. September 1954.)

Einleitung.

Das Temperaturverhalten von Halbleitern wird durch die Theorie in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung beschrieben. Im Rahmen der Theorie der Leitfähigkeit von Halbleitern [1] und der Theorie des pn -Überganges [2] untersuchen wir im folgenden den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes für einen Störhalbleiter und einen pn -Übergang und diskutieren die das Temperaturverhalten bestimmenden Einflüsse. Diese lassen sich an dem für den Temperaturkoeffizienten berechneten Ausdruck besonders leicht übersehen.

Ein Störhalbleiter hat im Temperaturbereich überwiegender Störleitung (bei n - oder p -Typ) einen positiven Temperaturkoeffizienten, der in erster Näherung von Materialkonstanten unabhängig ist. Im Eigenleitungsbereich ist der Temperaturkoeffizient negativ und seine Größe wird durch die Breite des verbotenen Bandes bestimmt. Im Übergangsbereich zwischen Stör- und Eigenleitung spielen außerdem noch die Dotierung und gewisse Materialkonstanten des Kristalls eine Rolle. Der Übergang zur Eigenleitung liegt bei um so höheren Temperaturen, je größer die Störstellenkonzentration ist.

Der Temperaturkoeffizient einer pn -Verbindung ist durch die Temperaturabhängigkeit des Diffusionsstromes der Minoritätsträger bestimmt. Dies hat zur Folge, daß der Temperaturkoeffizient des Widerstandes bei einer pn -Verbindung auch im Temperaturbereich der Störleitung negativ ist. Der Temperaturkoeffizient besteht aus zwei Gliedern. Das erste Glied ist negativ und von der Spannung abhängig; es bestimmt durch die Breite des verbotenen Bandes die Größenordnung des Temperaturkoeffizienten. Das zweite Glied ist positiv und beschreibt den Einfluß der Lebensdauer der Minoritätsträger auf den Temperaturkoeffizienten; es ist wesentlich kleiner als das negative Hauptglied und kann in erster Näherung gegen dieses vernachlässigt werden. Unter bestimmten Voraussetzungen, die wir im folgenden diskutieren, wird der Betrag des Temperaturkoeffizienten durch das zweite Glied verkleinert. Hierbei handelt es sich um einen relativ kleinen Effekt. — Man darf annehmen, daß die bei pn -Verbindungen von der Erfahrung bestätigten Variationen des Temperaturkoeffizienten im wesentlichen von dem von Fall zu Fall etwas variierenden Einfluß der Lebensdauer der Minoritätsträger herühren.

Temperaturkoeffizient eines Störhalbleiters.

Wir setzen im folgenden hinreichend kleine Störstellenkonzentrationen voraus, so daß die Streuung der Elektronen an Fremdatomen in der Umgebung der Zimmertemperatur vernachlässigt werden kann und nur Wechselwirkung mit thermischen Gitterschwingungen in Betracht kommt. Die elektrischen Feldstärken seien so klein, daß die Elektronenbeweglichkeit von der Feldstärke unabhängig ist.

Die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes ist für Germanium kürzlich von P. G. HERKART und J. KURSHAN [3] in einer Arbeit über

den theoretischen spezifischen Widerstand und HALL-Koeffizienten ausführlich dargestellt worden. Wir berechnen den relativen Temperaturkoeffizienten des spezifischen Widerstandes $\eta = 1/\varrho \cdot d\varrho/dT$ im Bereich der Stör- und Eigenleitung aus der Gesamtleitfähigkeit eines elektronischen Halbleiters, wobei wir in Übereinstimmung mit P. G. HERKART und J. KURSHAN für die Beweglichkeit näherungsweise ein $T^{-3/2}$ -Gesetz zugrunde legen. Dieses ergibt sich nach W. SHOCKLEY und J. BARDEEN [4] theoretisch aus der nach der Methode des Deformationspotentials berechneten freien Weglänge und stimmt mit der Erfahrung im wesentlichen überein. Die von M. B. PRINCE [5] festgestellten Abweichungen hiervon können im folgenden außer Betracht bleiben, da sie bei den hier in Frage kommenden geringen Minoritätsträgerdichten bei Raumtemperaturen klein sind.

Unter den genannten Voraussetzungen lautet der Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes beim n -Typ

$$\eta_n = -k \frac{\beta_n \Phi'_n \Phi_n^2 + \beta_p (\chi' \Phi_n - \chi \Phi'_n)}{(\beta_n \Phi_n^2 + \beta_p \chi) \Phi_n} \quad (1)$$

mit den Abkürzungen

$$\Phi_n = \sqrt{\gamma e^{-\frac{E_G}{kT}} + \frac{1}{4} \frac{(N_d - N_a)_n^2}{(kT)^3} + \frac{1}{2} \frac{(N_d - N_a)_n}{(kT)^{3/2}}}, \quad (1a)$$

$$\chi = \gamma e^{-\frac{E_G}{kT}}, \quad \gamma = \frac{4}{h^3} (2\pi)^3 (m_n m_p)^{3/2}, \quad (1b)$$

$$\beta_n = \frac{\pi \hbar^4 c_{ee}}{E_{1n}^2 m_n^{3/2}}, \quad \beta_p = \frac{\pi \hbar^4 c_{ee}}{E_{1p}^2 m_p^{3/2}}. \quad (1c)$$

Hierin bedeuten k die BOLTZMANNsche, h die PLANCKsche Konstante ($\hbar = h/2\pi$), T die absolute Temperatur, m_n und m_p die effektiven Massen der Elektronen und Defektelektronen, E_G die Breite des verbotenen Energiebandes, N_d und N_a die Dichte der Donatoren bzw. Akzeptoren, c_{ee} der mittlere Elastizitätsmodul. E_{1n} und E_{1p} sind Materialkonstanten [4], welche die thermischen Störungen der potentiellen Energie der Elektronen und Defektelektronen im Kristallgitter bestimmen. Φ'_n und χ' sind Ableitungen von Φ_n und χ nach kT .

Der Ausdruck (1) gilt insbesondere auch im Übergangsbereich von Stör- zur Eigenleitung. Durch systematische Reihenentwicklungen erhalten wir in erster Näherung die bekannten, von W. MEYER [6], F. MÖGLICH [7] und anderen diskutierten asymptotischen Halbleitergesetze. Es ergibt sich im Störleitungsbereich ein positiver Temperaturkoeffizient:

$$\eta_n = \frac{3}{2} \frac{1}{T} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\beta_p}{\beta_n} \right) \frac{2\gamma (kT)^3}{(N_d - N_a)_n^2} \left[\frac{1}{3} \frac{E_G}{kT} + 1 \right] \times e^{-\frac{E_G}{kT}} \pm \dots \right\}. \quad (2)$$

Bei Temperaturen unterhalb des Übergangsbereiches wird bereits das zweite Glied der Entwicklung in der geschweiften Klammer mit abnehmender Temperatur gegen 1 vernachlässigbar klein. Der Temperaturkoeffi-

zient ist somit im Störleitungsbereich von Materialkonstanten des Kristallgitters und von der Konzentration der Donatoren und Akzeptoren nahezu unabhängig. Bei überwiegender Eigenleitung ergibt sich aus (1) die Entwicklung

$$\eta_n = -\frac{E_G}{2kT^2} \left\{ 1 - \frac{\beta_n - \beta_p}{\beta_n + \beta_p} \frac{(N_d - N_a)_n}{2\sqrt{\gamma}(kT)^3} \left[1 + 3\frac{kT}{E_G} \right] \times e^{\frac{E_G}{2kT}} \pm \dots \right\}. \quad (3)$$

Hier ist der Temperaturkoeffizient negativ [6], [7] und wird für genügend hohe Temperaturen im Eigenleitungsbereich schon durch das erste Glied der Entwicklung mit ausreichender Genauigkeit dargestellt; seine Größenordnung wird durch die Breite des verbotenen Bandes bestimmt. Diese Gesetzmäßigkeiten sind in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Für einen Halbleiter vom p -Typ erhalten wir ganz entsprechende Ausdrücke, indem wir in den bisherigen Formeln den Index n durch p ersetzen und an Stelle von $(N_d - N_a)_n$ die Störstellenkonzentration $(N_a - N_d)_p$ des p -Materials einführen.

Temperaturkoeffizient einer pn -Verbindung.

Es soll jetzt der Temperaturkoeffizient eines pn -Flächengleichrichters untersucht werden. Wir verwenden ein eindimensionales Modell von W. SHOCKLEY [2], das folgenden Voraussetzungen genügt: Die Inversionszone soll klein gegen die Diffusionslänge der Ladungsträger sein, so daß in ihr die Rekombination vernachlässigt werden kann. Das p - und n -Gebiet wird als so ausgedehnt angenommen, daß der Löcherstrom im n -Material durch entgegenkommende Elektronen und der Elektronenstrom im p -Material durch Defektelektroden vollständig übernommen werden kann. Die an den pn -Kontakt angelegte Spannung soll klein sein und nur kleine Störungen der n - und p -Konzentrationen im thermischen Gleichgewicht erzeugen. Der betrachtete Temperaturbereich in der Nähe der Zimmertemperatur soll stets innerhalb des Bereiches überwiegender Störleitung und noch unterhalb des Überganges zur Eigenleitung liegen, so daß im Falle kleiner Spannungen die Minoritätsträgerdichten stets sehr klein gegen die Konzentrationen der Majoritätsträger sind¹.

Unter diesen Voraussetzungen berechnet sich der Temperaturkoeffizient $\eta = 1/R \cdot dR/dT$ des statischen Widerstandes $R = V_0/J_0$ der pn -Verbindung aus der SHOCKLEYSchen Gleichstrom-Spannungscharakteristik [2] wie folgt

$$\eta = -B + \Theta \quad (4)$$

mit

$$B = \frac{1}{T} \left(\frac{E_G}{kT} - \frac{qV_0}{kT} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{qV_0}{kT}}} + \frac{11}{4} \right) \quad (5)$$

und

$$\Theta = \frac{k}{2} \frac{\tau_n^{3/2} \tau_p' C_p N_p + \tau_p^{3/2} \tau_n' C_n N_n}{\tau_n^{3/2} \tau_p C_p N_p + \tau_p^{3/2} \tau_n C_n N_n}. \quad (6)$$

¹ d. h. es gilt mit ausreichender Genauigkeit:

$$p_n = \frac{\gamma(kT)^3}{(N_d - N_a)_n} e^{-\frac{E_G}{kT}} \ll n_n = (N_d - N_a)_n, \\ n_p = \frac{\gamma(kT)^3}{(N_a - N_d)_p} e^{-\frac{E_G}{kT}} \ll p_p = (N_a - N_d)_p.$$

Wir verwenden im folgenden die Abkürzungen

$$N_n = (N_d - N_a)_n, \quad N_p = (N_a - N_d)_p, \quad (7)$$

$$C_n = \left(\frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \right)^{1/2} \frac{\hbar^2 c_{ee}^{1/2}}{E_{1n} m_n^{5/4}}, \quad C_p = \left(\frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \right)^{1/2} \frac{\hbar^2 c_{ee}^{1/2}}{E_{1p} m_p^{5/4}}, \quad (7a)$$

τ_p' und τ_n' bedeuten Ableitungen der Lebensdauer der Defektelektroden im n - bzw. der Elektronen im p -Gebiet nach kT , ferner ist $V_0 > 0$ die angelegte Gleichspannung in Flußrichtung. Für Germanium sind die Werte der Konstanten

$$C_n = 3,84 \quad \text{und} \quad C_p = 2,64 \frac{\text{cm}}{\text{s}^{1/2}} (\text{eV})^{1/4}.$$

Mit zunehmender Flußspannung V_0 nimmt B und somit der Betrag des Temperaturkoeffizienten ab. In Sperrichtung ist der Sättigungsstrom von der Spannung ($V_0 < 0$) unabhängig, der spannungsabhängige Term in (5) ist deshalb im Sättigungsbereich zu streichen.

Der Summand Θ ist positiv und wesentlich kleiner als B . Der pn -Kontakt hat folglich auch im Temperaturbereich der Störleitung einen negativen Temperaturkoeffizienten, obwohl der Kristall an sich in diesem Bereich einen positiven Temperaturkoeffizienten besitzt (2). Daß der Temperaturkoeffizient der pn -Verbindung negativ ist, folgt aus der exponentiellen Temperaturabhängigkeit der Minoritätsträgerdichten¹. Für Germanium hat E_G/kT bei 20°C den Wert 28,55. Da wir hier nur kleine Flußspannungen betrachten, bei denen der spannungsabhängige Term von B klein gegen E_G/kT^2 ist, wird die Größenordnung von B durch das Hauptglied E_G/kT^2 bestimmt.

D. GEIST und K. SEILER [8] fanden an pn -Verbindungen die von der SHOCKLEYSchen Theorie [2] geforderte exponentielle Temperaturabhängigkeit des Sperrstromes experimentell gut bestätigt. Im Hinblick auf den Temperaturkoeffizienten des Sperrwiderstandes im Sättigungsbereich bedeutet dies nach (4) und (5), daß bei diesen Messungen näherungsweise $\Theta = 11/4 \cdot 1/T$ ist, d. h. Θ beträgt im Mittel etwas weniger als 10% des Wertes von E_G/kT^2 .

Im allgemeinen beobachtet man, daß der Temperaturkoeffizient von pn -Verbindungen von Fall zu Fall in gewissen Grenzen variiert. Wenn Θ die beiden von E_G unabhängigen Korrekturglieder in B größenordnungsmäßig gerade kompensiert, ist der Temperaturkoeffizient durch $-E_G/kT^2$ gegeben. Je nach Maßgabe von Θ treten Abweichungen hiervon auf, die gegen den Gesamtbetrag des Temperaturkoeffizienten jedoch relativ klein sind.

Wir ermitteln im folgenden die Voraussetzungen für einen möglichst kleinen Temperaturkoeffizienten, wobei also Θ hinreichend große Werte annehmen muß. Ein in dieser Hinsicht günstiger Einfluß der Lebensdauer der Minoritätsträger auf den Temperaturkoeffizienten ist nach (4) und (5) nur zu erwarten, wenn Θ größere Werte als etwa 10% des Gesamtbetrages des Temperaturkoeffizienten erreicht. Dies ist, wie sich zeigen läßt, unter bestimmten Voraussetzungen tatsächlich der Fall und wird durch die Erfahrung bestätigt. Im allgemeinen werden jedoch die Voraussetzungen hierfür nicht in genügender Reinheit erfüllt.

Der Wert von Θ wird gemäß (6) durch die Dotierung auf beiden Seiten des pn -Kontaktes und durch die Lebensdauer der Minoritätsträger bestimmt. Aus der

von W. SHOCKLEY und W. T. READ [9] abgeleiteten Formel für die Lebensdauer der Ladungsträger eines Halbleiters berechnen wir die Lebensdauer der Minoritätsträger als Funktion der Temperatur, wobei die Dichte der Rekombinationszentren klein gegen die Majoritätsträgerdichte vorausgesetzt wird. Im Temperaturbereich der Störleitung ergibt sich hierbei, in Übereinstimmung mit Messungen von R. N. HALL [10] daß die Lebensdauer mit ansteigender Temperatur zunimmt. Nunmehr können wir die Größe von Θ abschätzen, wobei wir die folgenden charakteristischen Fälle unterscheiden.

Wir betrachten zunächst den unsymmetrischen pn -Kontakt. Im Falle einer höheren Dotierung auf der p -Seite $N_p > N_n$ zerlegen wir den Ausdruck (6) in die beiden Faktoren:

$$\Theta = \vartheta_n \zeta_n \quad (8)$$

$$\text{mit} \quad \vartheta_n = \frac{k}{2} \frac{\tau_p'}{\tau_p} \quad (9)$$

$$\text{und} \quad \zeta_n = \frac{1 + \frac{\tau_n'}{\tau_p} \frac{\tau_p^{3/2} C_n N_n}{\tau_n^{3/2} C_p N_p}}{1 + \frac{\tau_p^{1/2} C_n N_n}{\tau_n^{1/2} C_p N_p}} \quad (10)$$

Diese Zerlegung erweist sich als zweckmäßig, weil bei starker Unsymmetrie $N_p \gg N_n$ nur die Lebensdauer τ_p der Defektelektronen im n -Material wesentlich ist ($\zeta_n = 1$) und folglich Θ durch (9) gegeben ist. Wir haben deshalb die beiden Faktoren ϑ_n und ζ_n mit dem Index n versehen. Wenn das Energieniveau E_t der Rekombinationszentren in dem Energiebereich zwischen dem unteren Rand des Leitungsbandes E_c und der Mitte des verbotenen Bandes E_i liegt $E_c > E_t > E_i$, ($|E_i - E_t| > kT$), erhalten wir für (9) und (10) näherungsweise

$$\vartheta_n^I = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_c}{kT} + \frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}}, \quad (11)$$

$$\zeta_n^I = \frac{1 + \left(\frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \right)^{3/2} \frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}}{1 + \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}} \frac{C_n}{C_p} \left(\frac{N_n}{N_p} \right)^2}{1 + \left(\frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \right)^{1/2} \frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}}{1 + \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}} \frac{C_n}{C_p} \frac{N_n}{N_p}} \quad (12)$$

mit $0 < \varepsilon_c < E_G/2$. Hierin bedeutet $\varepsilon_c = E_c - E_t < \frac{E_G}{2}$

die Rekombinationsenergie und τ_{p0} bzw. τ_{n0} die Lebensdauer der Minoritätsträger in der n - bzw. p -Zone bei sehr hohen Störstellenkonzentrationen. Die Größen τ_{p0} und τ_{n0} sind ein Maß für die Dichte der Rekombinationszentren und deren Einfangsquerschnitte; sie sind in der Nähe der Zimmertemperatur praktisch von der Temperatur unabhängig ($\tau_{p0}' = \tau_{n0}' = 0$), was von R. N. HALL [10] empirisch bestätigt werden konnte. Die im gesamten Kristall als konstant angenommene

Trapdichte ist umgekehrt proportional zu τ_{n0} bzw. τ_{p0} . Wenn E_t in der unteren Hälfte des verbotenen Bandes liegt $E_c < E_t < E_i$, ($|E_i - E_t| > kT$), erhält man angenähert

$$\vartheta_n^{II} = \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \frac{1}{2T} \left(\frac{\varepsilon_v}{kT} + \frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}{1 + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}, \quad (13)$$

$$\zeta_n^{II} = \frac{1 + \left(\frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \right)^{3/2} \frac{1 + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}} \frac{C_n}{C_p} \left(\frac{N_n}{N_p} \right)^2}{1 + \left(\frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \right)^{1/2} \frac{1 + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma} (kT)^3}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}} \frac{C_n}{C_p} \frac{N_n}{N_p}} \quad (14)$$

mit $0 < \varepsilon_v < E_G/2$, hierin ist $\varepsilon_v = E_t - E_v < E_G/2$ die Rekombinationsenergie (E_v = oberer Rand des Valenzbandes).

Bei starker Unsymmetrie $N_p \gg N_n$ ergibt sich für $E_c > E_t > E_i$ mit (11) und (12)

$$\Theta = \vartheta_n^I, \quad \zeta_n^I = 1, \quad (15)$$

d. h. für die Größe von Θ spielen dann nur die Dotierung und der Rekombinationsprozeß auf der n -Seite eine Rolle. Betrachten wir nun den Faktor ϑ_n^I in Abhängigkeit von der Rekombinationsenergie $\varepsilon_c = E_c - E_t$, wobei das Energieniveau E_t je nach der Art der vorhandenen Rekombinationszentren in der oberen Hälfte des verbotenen Bandes verschiedene Werte annehmen kann ($E_i < E_t < E_c$); so durchläuft ϑ_n^I als Funktion der Rekombinationsenergie (bei festgehaltener Dotierung und Temperatur im Bereich der Störleitung) nach (11) ersichtlich ein ausgeprägtes Maximum, dessen Lage ε_c^* durch

$$e^{-\frac{\varepsilon_c^*}{kT}} = \frac{N_n}{\sqrt{\gamma} (kT)^3} \left(\frac{\varepsilon_c^*}{kT} + \frac{1}{2} \right) \quad (16)$$

bestimmt wird. Es zeigt sich, daß ϑ_n^I bei gebräuchlichen Werten von N_n und in der Nähe der Zimmertemperatur nur in der Umgebung des Maximums mit B vergleichbare Werte annimmt (d. h. $\vartheta_n^I > 0,1 \cdot B$). Liegt das Energieniveau E_t außerhalb dieses im Vergleich zur Breite des verbotenen Bandes schmalen Bereiches, so wird ϑ_n^I vernachlässigbar klein und spielt für den Temperaturkoeffizienten praktisch keine Rolle. Beispielsweise ergibt sich für $N_n = 10^{15}$ Atome/cm³ und für 20°C (im Sättigungsbereich der Sperrichtung) das Maximum $\vartheta_{nmax}^I/B = 0,13$, bei dem die zugehörige optimale Rekombinationsenergie $\varepsilon_c^* = 0,20$ eV beträgt. Im Temperaturbereich zwischen -10° und 50°C verschiebt sich die Lage und der Wert des Maximums nur wenig, mit ansteigender Temperatur nimmt das Maximum langsam zu und verschiebt sich etwas zur Mitte des verbotenen Bandes hin.

Bei der weiteren Abschätzung von Θ ziehen wir ϑ_n^I als untere Grenze zum Vergleich heran und suchen die Bedingungen auf, bei denen Θ für gleiche Werte von T und ε_c bzw. ε_v größer als ϑ_n^I wird.

Ersichtlich nimmt ζ_n^I von 1 verschiedene Werte an, wenn die Dotierung N_p auf der p -Seite in der Größenordnung mit N_n vergleichbar wird. Aus $\zeta_n^I > 1$ berechnet sich mit (12) unter der Voraussetzung $E_c > E_t > E_i$ und $N_p > N_n$ (schwache Unsymmetrie), daß nur dann

$$\Theta > \vartheta_n^I, \quad \text{wenn} \quad \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} > \frac{N_p}{N_n}. \quad (17)$$

Wenn hingegen die Energieniveaus E_t in der unteren Hälfte des verbotenen Bandes liegen $E_v < E_t < E_i$, so ergibt sich mit (13) und (14) bei starker Unsymmetrie $N_p \gg N_n$

$$\Theta = \vartheta_n^{\text{II}}, \quad \zeta_n^{\text{II}} = 1, \quad (18)$$

während bei schwacher Unsymmetrie $N_p > N_n$ aus $\zeta_n^{\text{II}} > 1$ wie in (17) die Bedingung folgt

$$\Theta > \vartheta_n^{\text{II}}, \quad \text{wenn} \quad \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} > \frac{N_p}{N_n}. \quad (19)$$

Ein Vergleich von (11) und (13) ergibt, daß mit $\frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} > 1$ stets $\vartheta_n^{\text{II}} < \vartheta_n^I$ ist.

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, daß die Dotierung auf der n -Seite höher ist als auf der p -Seite ($N_n > N_p$). Man wird dann Θ zweckmäßig wie folgt in Faktoren zerlegen

$$\Theta = \vartheta_p \zeta_p. \quad (20)$$

Hierbei ist gemäß (6):

$$\vartheta_p = \frac{k}{2} \frac{\tau_n'}{\tau_n} \quad (21)$$

und

$$\zeta_p = \frac{1 + \frac{\tau_p'}{\tau_n} \frac{\tau_n^{3/2}}{\tau_p^{3/2}} \frac{C_p}{C_n} \frac{N_p}{N_n}}{1 + \frac{\tau_n^{1/2}}{\tau_p^{1/2}} \frac{C_p}{C_n} \frac{N_p}{N_n}}. \quad (22)$$

Diese Zerlegung geschieht analog zu (8), weil für $N_n \gg N_p$ nur der Ausdruck (21) maßgebend ist ($\zeta_p = 1$), d. h. also die Lebensdauer der Elektronen im p -Material (deshalb der Index p bei ϑ_p und ζ_p). Unter den gleichen Voraussetzungen wie für (11) bis (14) erhalten wir jetzt im Fall $E_c > E_t > E_i$ näherungsweise

$$\vartheta_p^I = \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \frac{1}{2T} \left(\frac{\varepsilon_c}{kT} + \frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}, \quad (23)$$

$$\zeta_p^I = \frac{1 + \left(\frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \right)^{3/2} \frac{1 + \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}} \frac{C_p}{C_n} \left(\frac{N_p}{N_n} \right)^2}{1 + \left(\frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \right)^{1/2} \frac{1 + \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}} \frac{C_p}{C_n} \frac{N_p}{N_n}} \quad (24)$$

mit $0 < \varepsilon_c < E_G/2$, und bei $E_v < E_t < E_i$

$$\vartheta_p^{\text{II}} = \frac{\frac{1}{2T} \left(\frac{\varepsilon_v}{kT} + \frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}, \quad (25)$$

$$\zeta_p^{\text{II}} = \frac{1 + \left(\frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \right)^{3/2} \frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}{1 + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}} \frac{C_p}{C_n} \left(\frac{N_p}{N_n} \right)^2}{1 + \left(\frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \right)^{1/2} \frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_p} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}}{1 + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \frac{\sqrt{\gamma(kT)^3}}{N_n} e^{-\frac{\varepsilon_v}{kT}}} \frac{C_p}{C_n} \frac{N_p}{N_n}} \quad (26)$$

mit $0 < \varepsilon_v < E_G/2$. Parallel zu den oben durchgeführten Überlegungen erhalten wir jetzt für $E_c > E_t > E_i$ bei starker Unsymmetrie $N_n \gg N_p$

$$\Theta = \vartheta_p^I, \quad \zeta_p^I = 1 \quad (27)$$

und bei schwacher Unsymmetrie $N_n > N_p$ aus $\zeta_p^I > 1$

$$\Theta > \vartheta_p^I, \quad \text{wenn} \quad \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} > \frac{N_n}{N_p}. \quad (28)$$

Entsprechend ergibt sich, wenn $E_v < E_t < E_i$ ist, bei $N_n \gg N_p$

$$\Theta = \vartheta_p^{\text{II}}, \quad \zeta_p^{\text{II}} = 1. \quad (29)$$

Im Falle schwacher Unsymmetrie $N_n > N_p$ folgt aus $\zeta_p^{\text{II}} > 1$ die Bedingung:

$$\Theta > \vartheta_p^{\text{II}}, \quad \text{wenn} \quad \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} > \frac{N_n}{N_p}. \quad (30)$$

Man überzeugt sich, daß ϑ_p^{II} mit dem Funktionsverlauf von ϑ_n^I für übereinstimmende Werte der Dotierung und der Rekombinationsenergie identisch ist. Es ergeben sich somit ganz entsprechende Verhältnisse wie oben; wir ziehen deshalb die Funktion ϑ_p^{II} als untere Grenze für die Abschätzung von Θ im Falle $N_n > N_p$ heran. Vergleicht man ϑ_p^I und ϑ_p^{II} , so zeigt sich, daß für $\tau_{n0}/\tau_{p0} > 1$ immer $\vartheta_p^I < \vartheta_p^{\text{II}}$ ist.

Zum Schluß betrachten wir noch die Verhältnisse beim symmetrischen pn -Kontakt $N_n = N_p$, die sich nunmehr leicht übersehen lassen. Aus (17) und (28) einerseits und durch Vergleich von (11) und (23) andererseits ergibt sich, wenn $N_n = N_p$ und $E_c > E_t > E_i$ sind, die folgende Abschätzung

$$\vartheta_n^I < \Theta < \vartheta_p^I \quad \text{bei} \quad \frac{\tau_{p0}}{\tau_{n0}} > 1, \quad (31)$$

die eine im Hinblick auf den Temperaturkoeffizienten optimale Bedingung darstellt, denn für $\tau_{p0}/\tau_{n0} < 1$ ist Θ und ϑ_p^I stets kleiner als ϑ_n^I . Ganz entsprechend lassen sich die optimalen Bedingungen und Grenzen für die Werte von Θ im Falle $N_n = N_p$ angeben, wenn $E_v < E_t < E_i$ ist. Aus Gl. (19) und (30) sowie durch Vergleich von Gl. (13) und (25) folgt, daß sich nur dann

$$\vartheta_p^{\text{II}} < \Theta < \vartheta_n^{\text{II}} \quad \text{ergibt, wenn} \quad \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} > 1 \text{ ist.} \quad (32)$$

Für $N_n = N_p$ ist außerdem $\vartheta_n^I = \vartheta_p^{\text{II}}$ bei gleichen Rekombinationsenergien ($\varepsilon_v = \varepsilon_c$).

Zusammenfassung.

Der Temperaturkoeffizient des Widerstandes eines elektronischen Halbleiters wird in geschlossener Form für den gesamten Stör- und Eigenleitungsbereich berechnet, wobei nur die Streuung der Elektronen an den thermischen Gitterschwingungen berücksichtigt wird und Streuung an Störstellenatomen nicht in Betracht kommt. Der angegebene Ausdruck für den Temperaturkoeffizienten gilt insbesondere auch im Übergangsbereich zwischen Stör- und Eigenleitung. Durch asymptotische Reihenentwicklungen ergeben sich in erster Näherung die bekannten Grenzesetze der Temperaturabhängigkeit eines Halbleiterwiderstandes im Stör- und Eigenleitungsbereich. Die Temperatur, bei welcher der Temperaturkoeffizient verschwindet, liegt um so höher, je größer die Konzentration der Störatome ist.

Ferner wird der Einfluß der Lebensdauer der Minoritätsträger auf den Temperaturkoeffizienten einer *pn*-Verbindung untersucht. Der Temperaturkoeffizient einer *pn*-Verbindung wird seinem Betrag nach unter bestimmten Voraussetzungen durch die Lebensdauer der Minoritätsträger verkleinert. Dieser Effekt ist relativ klein und kann nur dann auftreten, wenn das Energieniveau der Rekombinationszentren in einen bestimmten, schmalen Energiebereich fällt, der innerhalb des verbotenen Bandes in der unteren oder in der oberen Hälfte (außerhalb der Bandmitte) liegen kann. Außerdem müssen bei unsymmetrischer Dotierung $N_p > N_n$ zusätzlich als optimale Voraussetzungen $\tau_{p0}/\tau_{n0} > N_p/N_n$ und $E_c > E_t > E_i$ erfüllt sein. Im umgekehrten Fall $N_n > N_p$ lauten die optimalen Voraussetzungen $\tau_{n0}/\tau_{p0} > N_n/N_p$ mit $E_v < E_t < E_i$. Die Möglichkeit einer günstigen Beeinflussung des

Temperaturkoeffizienten durch die Lebensdauer der Minoritätsträger ist bei einem symmetrischen *pn*-Kontakt größer (31), (32) als bei starker Unsymmetrie (15), (29). Bei Symmetrie $N_n = N_p$ müssen als optimale Voraussetzungen $\tau_{p0}/\tau_{n0} > 1$ für $E_c > E_t > E_i$ und $\tau_{n0}/\tau_{p0} > 1$ bei $E_v < E_c < E_i$ erfüllt sein.

Den angegebenen Voraussetzungen für eine Verkleinerung des Temperaturkoeffizienten infolge der Lebensdauer der Minoritätsträger liegt die Annahme zugrunde, daß am Rekombinationsprozeß jeweils nur eine bestimmte Art von Rekombinationszentren mit einem einzigen zugehörigen Energieniveau innerhalb des verbotenen Bandes beteiligt ist. Im allgemeinen werden die diskutierten Voraussetzungen bei *pn*-Verbindungen von Natur aus nicht in dieser Reinheit erfüllt sein. Dies hat zur Folge, daß der Temperaturkoeffizient, wie es die Erfahrung zeigt, innerhalb gewisser Grenzen von Fall zu Fall etwas verschieden ausfällt. Unterschiede im Temperaturkoeffizienten bei sonst gleichen Voraussetzungen weisen somit im wesentlichen auf den Einfluß der Lebensdauer der Minoritätsträger in den Diffusionsströmen der *pn*-Verbindung hin.

Literatur. [1] SHOCKLEY, W.: *Electrons and Holes in Semiconductors*. D. van Nostrand Company, Inc. New York 1950. — [2] SHOCKLEY, W.: *Bell Syst. Techn. J.* 28, 435 (1949). — [3] HERKART, P. G. u. J. KURSHAN: *RCA Rev.* 14, 427 (1953). — [4] SHOCKLEY, W. u. J. BARDEEN: *Phys. Rev.* 77, 407 (1950). — [5] PRINCE, M. B.: *Phys. Rev.* 91, 271 (1953). — [6] MEYER, W.: *Z. techn. Phys.* 16, 355 (1935); *Z. Phys.* 85, 278 (1933). — [7] MÖGLICH, F.: *Z. Phys.* 109, 503 (1938). — [8] GEIST, D. u. K. SEILER: *Naturwissensch.* 39, 401 (1952). — [9] SHOCKLEY, W. u. W. T. READ: *Phys. Rev.* 87, 835 (1952). — [10] HALL, R. N.: *Phys. Rev.* 87, 387 (1952).

Dr. EBERHARD GROSCHWITZ, Halbleiterfabrik der Siemens & Halske AG, München.

Die inneren Spannungen und der Inkompatibilitätstensor in der Elastizitätstheorie.

Von ERKEHART KRÖNER.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 13. November 1954.)

1. Allgemeines.

Die Elastizitätstheorie wird im allgemeinen in zwei Hauptabschnitte eingeteilt. Sie sollen hier mit „Theorie der äußeren Spannungen“ und mit „Theorie der inneren Spannungen“ bezeichnet werden. Die in der ersteren betrachteten Spannungen werden auch oft als Lastspannungen, die der letzteren als Eigenspannungen bezeichnet¹. Während Lastspannungen durch sog. äußere Kräfte verursacht werden, die über das Volumen und den Rand des betreffenden elastischen Mediums verteilt sein können, kommen Eigenspannungen durch andere Ursachen zustande. Natürlich kann ein Körper mit Eigenspannungen gleichzeitig noch durch Kräfte beansprucht sein. Dann überlagern sich die inneren und äußeren Spannungen linear². Daher kann man jedes zusammengesetzte elastische Problem in je ein Teilproblem der Theorie der äußeren und der inneren Spannungen zerlegen und diese Teilprobleme unabhängig voneinander lösen.

Unter der Voraussetzung, daß überall die sog. Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungen erfüllt sind, gilt der KIRCHHOFFSche Eindeutigkeitssatz. Er besagt, daß mit jeder Verteilung der äußeren Kräfte ein bestimmter Spannungszustand eindeutig verbunden ist. Statt der obigen Voraussetzung kann man den KIRCHHOFFSchen Satz auch dadurch einschränken, daß man die Existenz innerer Spannungen ausschließt. In der Erfüllung oder Nichterfüllung der Kompatibilitätsbedingungen hat man also ein weiteres Kriterium dafür, ob man es mit äußeren oder inneren Spannungen zu tun hat. Es gilt der Satz, daß Eigenspannungen stets mit einer Nichterfüllung der Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungen verbunden sind. Und zwar können diese Bedingungen überall im elastischen Medium, nur längs Flächen und Linien oder sogar nur an Punkten ungültig sein. Bei mehrfach zusammenhängenden Körpern gibt es Eigenspannungen, bei denen im ganzen Körper die Kompatibilitätsbedingungen gelten. Diese scheinbare Ausnahme läßt sich trotzdem dem obigen Satz unterordnen, wenn man annimmt, daß hier die Inkompatibilitätsbereiche außerhalb des Mediums liegen. Man kann hier von fiktiven Inkompatibilitäten sprechen, so

¹ Einen ausführlichen Bericht mit vielen Zitaten über Eigenspannungen gab P. NEMENYI [1]. Hier und bei H. REISSNER [2] im gleichen Band werden die in Kapitel 1 nur angedeuteten Dinge zum Teil ausführlicher behandelt.
² Dasselbe gilt für die zugehörigen Energien [26].

wie man in der Hydrodynamik von fiktiven Wirbeln spricht.

Die inneren Spannungen unterteilt man im allgemeinen in drei weitere Hauptgruppen: Diesog. Wärmespannungen, die ein elastischer Körper im inhomogenen Temperaturfeld aufweist, magneto- bzw. elektrostriktive Spannungen und die sog. Werdegangsspannungen, die, wie der Name sagt, von der Vorgeschichte des Körpers abhängen. Zur dritten Gruppe gehören die wichtigen Spannungen, die nach plastischer Verformung von Metallen zurückbleiben. Sie sind für die Technik von größter Bedeutung. Ferner gehören hierher die Gußspannungen bzw. allgemein die Spannungen, die bei der Kristallisation aus Schmelzen deswegen entstehen, weil Schmelze und Kristall verschiedene Dichte haben und die Abkühlung ungleichmäßig erfolgt. Große Bedeutung haben innere Spannungen weiterhin bei Ausscheidungs- und Ordnungsvorgängen in Metallkristallen. Sie entstehen etwa dadurch, daß Ausscheidungsprodukt und Ausgangsphase verschiedene Dichte haben oder sich aus anderen Gründen behindern. Innere Spannungen treten auch dann auf, wenn in einem Kristall Atome einer anderen Sorte in schwankender Konzentration gelöst sind. Diese Spannungen haben sicher einen wesentlichen Einfluß auf die Diffusion der gelösten Atome.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Energie der inneren Spannungsfelder in jedem festen Körper einen wesentlichen Bestandteil des gesamten Energieinhalts ausmacht. Eine eingehende Beschäftigung mit den inneren Spannungen ist daher bei jedem Studium des festen Körpers unerlässlich.

2. Die mechanisch-elektrisch-magnetische Analogie.

In seinem klassischen „Lehrbuch der Kristallphysik“ hat W. VOIGT die Einteilung des umfangreichen Stoffes nach folgendem Gesichtspunkt vorgenommen: Die Repräsentanten einer bestimmten Theorie sind zwei Feldgrößen, welche, in bestimmter Weise miteinander multipliziert, eine Energiedichte ergeben. Diese Feldgrößen können beide Vektoren sein, z. B. in der Elektrostatik die Feldvektoren ϑ , \mathfrak{E} oder in der Magnetostatik \mathfrak{B} , \mathfrak{H} . Es kann auch eine Größe ein Vektor, die andere ein Tensor sein, z. B. bei der Piezoelektrizität elektrische Feldstärke \mathfrak{E} und Spannungstensor σ . Schließlich können beide Feldgrößen Tensoren sein, wie in der Elastizitätstheorie Spannungstensor σ und Deformationstensor ε . Danach gliederte VOIGT seinen Stoff in Vektor-Vektorthorien,

Vektor-Tensortheorien und Tensor-Tensortheorien. Naturgemäß ist die Vielfalt der Erscheinungen im letzten Fall am größten. Wegen der Linearität all dieser Theorien haben sie jedoch sehr wesentliche Züge gemeinsam. Man kann die Elastizitätstheorie weitgehend analog zu den viel einfacheren vektoriellen Feldtheorien der Elektrizitätslehre behandeln. Und zwar stellt sich heraus, daß die Theorie der äußeren Spannungen der Elektrostatik parallel zu setzen ist, während die Theorie der Eigenspannungen zur Theorie der Magnetfelder stationärer Ströme gehört. Die Analogien sind aus Tabelle 1 zu sehen. (Erläuterung der Bezeichnungen im folgenden Text.)

Dort sind immer analoge Gleichungen durch denselben Buchstaben gekennzeichnet. Unter (b) werden z. B. die Aussagen „elektrische Ladungen q sind die Quellen des Feldes ϑ der dielektrischen Verschiebung“ und „Kräfte F sind die Quellen des Feldes σ_a der äußeren Spannungen“ parallel gesetzt. (b') sind die bekannten Bedingungen des Kräftegleichgewichts im elastischen Körper, wenn die Operation Div (Divergenz) durch $\text{Div } \sigma \equiv \nabla \cdot \sigma$ definiert wird. (c') ist das Hookesche Gesetz in Tensorform, d. h. c soll für die elastischen Konstanten stehen. Durch Vergleich mit der elektrischen Materialgleichung (c'') ergibt sich, daß ε_a und \mathfrak{E} analoge Feldgrößen sind. Folglich müssen unter (a') Gln. für ε_a stehen, die zu $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ analog sind. Solche Gln. stehen in der Tat mit den erfüllten Kompatibilitätsbedingungen zur Verfügung. (Die abgekürzte Schreibweise in (a') wird weiter unten erklärt.)

Innere Spannungen haben keine Quellen, daher lauten die Gleichgewichtsbedingungen in diesem Fall $\text{Div } \sigma_i = 0$ und nach (g) ist σ_i analog zum Vektor des Magnetfeldes \mathfrak{B} . Vergleich der Materialgleichungen (h) zeigt ferner, daß die inneren Verzerrungen ε_i zum Vektor der magnetischen Feldstärke \mathfrak{H} analog sind. Folglich muß (f') eine zu der Aussage „die elektrischen Ströme j sind die Wirbel des Magnetfeldes \mathfrak{H} “ analoge Aussage machen. Es wird anschließend gezeigt, daß die nichterfüllten Kompatibilitätsbedingungen eine solche Aussage liefern.

3. Die Kompatibilitätsbedingungen.

Bei der Entwicklung der gewöhnlichen Elastizitätstheorie [3], [4] geht man im allgemeinen von den Verschiebungen $\mathfrak{s} = (u, v, w)$ der einzelnen Punkte des Kontinuums aus und erhält rein geometrisch als die Komponenten des Verzerrungstensors die drei

Tabelle 1.

	Theorie der äußeren Spannungen	Elektrostatik	Theorie der inneren Spannungen	Theorie der Magnetfelder stationärer Ströme
Feldgleichungen	Ink $\varepsilon_a = 0$ (a') Div $\sigma_a = -\mathfrak{F}$ (b')	rot $\mathfrak{E} = 0$ (a'') div $\vartheta = q$ (b'')	Ink $\varepsilon_i = \eta$ (f') Div $\sigma_i = 0$ (g')	rot $\mathfrak{H} = j$ (f'') div $\mathfrak{B} = 0$ (g'')
Materialgleichungen	$\sigma_a = c \cdot \varepsilon_a$ (c')	$\vartheta = \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{E}$ (c'')	$\sigma_i = c \cdot \varepsilon_i$ (h')	$\mathfrak{B} = \mu \cdot \mathfrak{H}$ (h'')
Lösungsansatz	$\varepsilon = \text{Def } \mathfrak{s}$ (d')	$\mathfrak{E} = \text{grad } \Phi$ (d'')	$\sigma_i = 2G \text{ Ink} \times \left(\chi + \frac{1}{m-1} \chi_1 I \right) \text{ (i')}$ Div $\chi = 0$	$\mathfrak{B} = \mu \text{ rot } \mathfrak{A}$ (i'') div $\mathfrak{A} = 0$
Entkoppelte Differentialgleichungen	$\Delta \Delta \mathfrak{s} = f(\mathfrak{F})$ (e')	$\Delta \Phi = q/\bar{\varepsilon}$ (e'')	$\Delta \Delta \chi = \eta$ (k')	$\Delta \mathfrak{A} = -j$ (k'')

Dehnungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \dots \quad (1)$$

und die drei Scherungen

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots \quad (1)$$

Die sechs Komponenten des Verzerrungstensors ε sind nicht unabhängig voneinander, da sie sich aus nur drei Funktionen u, v, w herleiten. ε ist also kein allgemeiner symmetrischer Tensor, sondern ein ganz spezieller, nämlich ein solcher, den man mit Hilfe eines Vektors beschreiben kann. Da der Deformationstensor ε der hervorragendste Repräsentant solcher spezieller Tensoren ist, nennt man diese allgemein Deformatoren [5] und schreibt z.B. zur Abkürzung für den Zusammenhang (1) zwischen ε und $\vec{\varepsilon}$

$$\varepsilon = \text{Def } \vec{\varepsilon}.$$

Diese Gleichung ist in der Tabelle unter (d') eingetragen.

Die Bedingungen, die zwischen den Komponenten eines symmetrischen Tensors bestehen müssen, damit dieser ein Deformator wird, heißen Kompatibilitätsbedingungen. Man gewinnt sie im Falle des Deformationstensors bekanntlich aus der Forderung, daß die dritten Ableitungen der u, v, w von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig sein müssen. Man erhält so drei Gleichungen von der Form

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2)$$

und drei von der Form

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = 0. \quad (2)$$

Diese sechs Gleichungen lassen sich in der Form [6]

$$\nabla \times \varepsilon \times \nabla = 0^1$$

abkürzen. Das bedeutet, daß die linken Seiten von (2) Komponenten eines symmetrischen Tensors sind.

Die Gln. (2) besagen also, daß die Komponenten von ε „kompatibel“ sind, d.h. daß ε durch ein Vektorfeld darstellbar ist. Diesen Sachverhalt drücken wir nun dadurch aus, daß wir sagen: „Die Inkompatibilität von $\varepsilon = 0$ “. Den letzten Satz schreiben wir abgekürzt

$$\text{Ink } \varepsilon = 0. \quad (2')$$

Wir kommen so zu einer Operatorauffassung der Inkompatibilität, wobei der Operator Ink etwa durch die Identität $\text{Ink } \varepsilon \equiv \nabla \times \varepsilon \times \nabla$ definiert wird.

Die Gln. (2') sind unter (a') in der Tabelle 1 eingetragen, und man sieht, daß die Operation Ink, angewandt auf Tensoren, der Operation rot, angewandt auf Vektoren, analog ist. In der Tat erhält man die Gleichung $\text{rot } \vec{\varepsilon} = 0$ als notwendige Bedingung dafür, daß $\vec{\varepsilon}$ sich aus einem skalaren Potential Φ durch Gradientenbildung ableiten läßt. Man verlangt dazu, analog wie oben, daß die zweiten Ableitungen von Φ von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig sein sollen. Man kann also die Gleichung $\text{rot } \vec{\varepsilon} = 0$ die Kompatibilitätsbedingungen der Elektrostatik nennen.

¹ Für die folgenden Tensorrechnungen wurde die Bezeichnungsweise nach M. LAGALLY [6] gewählt.

Wir haben von $\varepsilon = \text{Def } \vec{\varepsilon}$ und $\vec{\varepsilon} = \text{grad } \Phi$ auf $\text{Ink } \varepsilon = 0$ und $\text{rot } \vec{\varepsilon} = 0$ geschlossen. Der umgekehrte Schluß ist natürlich genau so richtig. D.h. die Gleichungen (d) sind mit den Gleichungen (a) vollkommen gleichwertig. Trotzdem soll hier die Auffassung vertreten werden, daß die Gleichungen (a) bis (c) die eigentlichen Grundgleichungen der Theorie der äußeren Spannungen bzw. der Elektrostatik sind. Dann bekommen die Gleichungen (d) den Charakter von Lösungsansätzen, durch die die Gleichungen (a) identisch befriedigt werden.

Unter (f') sind die nicht erfüllten Kompatibilitätsbedingungen eingetragen. Es ist bezeichnend für die hier zu entwickelnde Theorie der inneren Spannungen, daß man sich nicht mit der Nichterfüllung der Kompatibilitätsbedingungen zufrieden gibt, sondern die Größe der Nichterfüllung, d.h. die Inkompatibilität, zumindest in Gedanken, messen will. Ein Vergleich aus der Thermodynamik ist vielleicht nützlich. Hier begnügt man sich nicht mit der Beschreibung eines Vorgangs als irreversibel, sondern man schafft ein Maß für die Irreversibilität. Entsprechend braucht man ein Maß für die Inkompatibilität. Wir haben in (f') daher nicht $\text{Ink } \varepsilon \neq 0$, sondern die bestimmtere Aussage $\text{Ink } \varepsilon = \eta$ eingetragen. Dabei ist die noch nicht gedeutete physikalische Größe $\eta(\tau)$ ein symmetrischer Tensor 2. Stufe und in gewisser Weise analog zur Stromdichte $\vec{j}(\tau)$.

Unsere Analogieliste sei nun noch durch Tabelle 2 vervollständigt, welche die wichtigsten Operationen der Vektor-Vektorthorien den entsprechenden der Tensor-Tensortheorien gegenüberstellt. Die Gleichungen rechts sagen aus, daß man genau so, wie man jedes Vektorfeld in sein Quellen- und Wirbelfeld, so auch jedes symmetrische Tensorfeld in sein Deformator- und Inkompatibilitätsfeld zerlegen kann. Dieser Satz bildet mit den übrigen Aussagen der Tabelle 2 die formale Grundlage, die es gestattet, die Elastizitätstheorie so weitgehend in Analogie zu den einfacheren elektrischen Theorien zu entwickeln.

Tabelle 2.

grad, rot, div		div rot $\equiv 0$, rot grad $\equiv 0$		$\tau = \text{grad } a + \text{rot } c$
Def, Ink, Div		Div Ink $\equiv 0$, Ink Def $\equiv 0$		$\tau = \text{Def } a + \text{Ink } \gamma$

4. Die inneren Spannungen bei einfach zusammenhängenden Körpern.

Wir wollen uns nun vorerst von der formalen Darstellung unserer Tabelle abwenden und versuchen, den Kompatibilitätsbedingungen einen physikalischen Inhalt abzugewinnen. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit einem Studium der physikalischen Natur der Eigenspannungen überhaupt.

Zunächst handle es sich um einfach zusammenhängende Körper. Denken wir uns einen solchen Körper in einem verspannten Zustand. Wenn dann die zugehörigen Verzerrungen kompatibel sind, kann man bestimmt eine Verteilung äußerer Kräfte finden, die den Körper wieder in den spannungslosen Zustand zurückführt. Denn dann waren es gerade die umgekehrten Kräfte, die den Spannungszustand hervorgerufen haben. Das Wesentliche ist also offenbar, ob in der Nähe des verspannten Zustandes ein mit Hilfe äußerer Kräfte erreichbarer spannungsloser Gleichgewichtszustand existiert oder nicht. Bei inneren

Spannungen existiert er nicht, und wie das dann aussieht, soll jetzt gezeigt werden.

Wir betrachten einen elastischen Körper bei konstanter Temperatur T_0 und denken ihn aus lauter einzelnen, gleich großen Volumenelementen zusammengesetzt¹. Jeder Temperatur T_0 entspreche eine bestimmte Größe der Volumenelemente nach Maßgabe des Ausdehnungskoeffizienten. Der Körper soll nun in einen anderen Zustand gebracht werden, und zwar denken wir uns die Zustandsänderung auf zwei Wegen, die zu dem gleichen Endzustand führen, vollzogen.

1. Wir bringen den Körper in ein inhomogenes Temperaturfeld $T(\mathbf{r})$, das derart sein soll, daß sich der gewünschte Spannungszustand einstellt. 2. Wir zerschneiden den Körper in seine einzelnen Volumenelemente, erwärmen jedes von ihnen auf die ihm zukommende Temperatur $T(\mathbf{r})$ und fügen dann alle wieder zusammen. Zunächst wird also das Volumenelement Nr. 1 unseres Körpers isoliert auf die Temperatur $T(1)$ gebracht. Dann ist dieses Element nach wie vor spannungslos, es hat sich aber ausgedehnt, wobei es sich ähnlich geblieben ist. Es ist nun verzerrt, und zwar ist die Verzerrung der Temperaturdifferenz proportional, also $\varepsilon'(1) = \alpha(T(1) - T_0) I$, wenn α die Wärmeausdehnungszahl und I der Einheitstensor ist. Die Nachbarelemente unseres Elementes Nr. 1 denken wir uns ebenfalls isoliert und auf die Temperaturen $T(2)$, $T(3)$... gebracht. Sie sind jetzt um $\varepsilon'(2) = \alpha(T(2) - T_0) I$ usw. gegenüber dem Zustand bei T_0 verzerrt.

Wenn wir jetzt nachträglich die einzelnen Volumenelemente wieder zu einem Ganzen zusammenbauen wollen, müssen wir feststellen, daß sie nicht mehr lückenlos aneinander passen, was gerade daher kommt, daß sie sich infolge verschiedener Erwärmung verschieden ausgedehnt haben. In der Tat kann man etwa eine Anzahl von Bauklötzen nur dann zu einem kompakten Körper ohne Lücken zusammenbauen, wenn die Klötze alle gleich groß oder wenigstens in ganz bestimmter Weise der Größe nach geordnet sind. Im allgemeinen Fall muß also die Passung erst erzwungen werden, da wir am Schluß wieder den kompakten Körper ohne Lücken haben wollen, wie er sich nach der Erwärmung als Ganzes darstellt. Das Erzwingen der Passung erfordert eine neuerliche Deformation ε'' der Volumenteile, die nunmehr nach dem HOOKESCHEN Gesetz mit einer Spannung verbunden ist. Wir erhalten also eine gesamte Deformation $\varepsilon = \alpha(T(\mathbf{r}) - T_0) I + \varepsilon''$, die zugehörigen Spannungen sind $\sigma = c \cdot \varepsilon''$.

Man kann nun von jedem Punkt des Körpers im Temperaturfeld sagen, wo er vor Anlegen dieses Feldes gewesen ist, also jedem Punkt eine Verrückung ξ zuordnen. Demnach ist die Gesamtdeformation vom Zustand T_0 aus kompatibel, also $\text{Ink } \varepsilon = 0$. Hieraus folgt ohne weiteres $\text{Ink } \varepsilon'' = -\alpha \text{Ink } (T - T_0) I = \eta$.

Nun hat die Gesamtdeformation ε mit dem Zustand des Körpers sehr wenig zu tun. Sie hängt ja wesentlich davon ab, was man — willkürlich — als Ausgangstemperatur T_0 festsetzt. Der Zustand des Körpers wird vielmehr durch die Deformation ε'' bzw. die sich daraus nach dem HOOKESCHEN Gesetz ergebenden Spannungen bestimmt. Wir betrachten also

ε'' als die eigentliche oder „effektive“ Deformation. Dann wird das mathematische Problem der stationären Wärmespannungen durch die Gleichungen¹

$$\text{Div } \sigma = 0, \quad \text{Ink } \varepsilon'' = \eta = -\alpha \nabla \nabla T, \quad \sigma = c \cdot \varepsilon'' \quad (3)$$

formuliert, wozu noch die Randbedingungen treten. Weiter unten wird gezeigt, wie der mathematische Teil des Gesamtproblems, nämlich die Bestimmung der inneren Spannungen, aus den bekannten Ortsfunktionen η , gelöst wird. Als physikalischen Teil des Gesamtproblems der inneren Spannungen werden wir die Bestimmung von η als Funktion des Ortes aus den physikalischen Gegebenheiten bezeichnen. Wir sehen also η als den Einfluß an, der die inneren Spannungen hervorruft. Der physikalische Teil ist nur selten so einfach wie beim Problem der Wärmespannungen zu lösen. Im allgemeinen wird er wesentlich schwieriger als der mathematische Teil sein.

Das Problem der Wärmespannungen wurde schon sehr früh von DUHAMEL und NEUMANN erfolgreich behandelt [7], [8]. Sie verwandten als Grundgleichungen (bei der gleichen Bezeichnung wie oben)

$$\text{Div } \sigma = 0, \quad \varepsilon = \text{Def } \xi, \quad \sigma = c \cdot [\varepsilon - \alpha(T - T_0) I].$$

Durch Elimination σ und ε lassen sich diese Gleichungen in solche für die Verschiebungen allein umwandeln. Die Berechnung der Spannungen nach dieser Methode mag etwa die gleiche Mühe machen wie die Berechnung aus (3) nach der weiter unten folgenden Methode.

Die Wärmespannungen wurden hier nicht deshalb so ausführlich behandelt, um eine Methode zu ihrer Bestimmung zu zeigen. Wichtiger ist, daß die Wärmespannungen ein besonders übersichtliches Beispiel darstellen, das erlaubt, tieferen Einblick in das Wesen der inneren Spannungen zu bekommen. Man versteht von hier aus nun leicht den allgemeinsten Fall innerer Spannungen in einfach zusammenhängenden Körpern. Zerschneidet man einen solchen Körper mit Spannungen in gleich große (oder auch nicht gleich große) Volumenelemente und läßt diese sich entspannen (ohne sonst etwas zu ändern), so werden die Volumenelemente, wenn Eigenspannungen vorlagen, nach der Entspannung nicht mehr lückenlos aneinander passen. Im Fall der Wärmespannungen ist das Nichtpassen durch verschiedene Größenänderung der Volumenelemente infolge der Entspannung begründet. Bei allgemeineren inneren Spannungen werden die Volumenelemente auch der Form nach nicht mehr zusammenpassen. Als Beispiel sei der plastisch verformte Polykristall genannt, bei dem man sich direkt die einzelnen Körner als Volumenelemente vorstellen mag.

Wir haben oben gesehen, daß eine kompatible Verzerrung der einzelnen Volumenelemente zu einer inkompatiblen Verzerrung des Makrokörpers führt. Umgekehrt kann man sagen: Im unendlich Kleinen ist jede Verzerrung kompatibel. Dieser Gedanke führt zu einer weiteren Aussage über die Kompatibilitätsbedingungen.

¹ Solche Modelle wurden schon früher betrachtet [2], [26]. Die Überlegungen dieses Kapitels lassen sich auch auf magnetostriktive Spannungen anwenden (G. Rieder, Stuttgart noch unveröffentlicht).

¹ Man zeigt leicht, daß im stationären Fall ($\Delta T = 0$) $\text{Ink } (T - T_0) I = \nabla \nabla T$ ist, wobei $\nabla \nabla T$ der symmetrische Tensor mit den Komponenten $\partial^2 T / \partial x^2$, $\partial^2 T / \partial x \partial y$ usw. ist. $\nabla \nabla T$ ist also die lokale Änderung des Temperaturgradienten. Die Bestimmung von $\nabla \nabla T$ wird im allgemeinen die Lösung eines Randwertproblems der Wärmeleitungstheorie erfordern.

Wir denken uns eine sehr dünne, in spannungslosem Zustand gebogene also nicht in einer Ebene liegende Membran. Von solch einer Membran kann man sagen, sie befindet sich in einem zweidimensionalen, nicht euklidischen Raum. Indem wir sie nun zwischen zwei starre Wände einspannen, können wir sie in den euklidischen zweidimensionalen Raum, nämlich die Ebene zwingen. Wenn wir selbst nun im zweidimensionalen euklidischen Raum lebten, so würden wir von dem Zwang, der auf die Membran wirkt, nichts merken. Wir würden dann sagen: Diese Membran hat innere Spannungen. Wir können die Sachlage auch umdrehen. Gegeben sei eine ebene Membran mit solchen „Eigenspannungen“. Wenn wir ihr den Zwang, in der Ebene zu bleiben, nehmen, wird sie ihre Eigenspannungen ausgleichen, indem sie in den nicht euklidischen Raum geht, also sich krümmt. Eine dünne, nirgends festgehaltene Membran hat keine Eigenspannungen.

Bei dreidimensionalen Gebilden mit Eigenspannungen ist ein Ausweichen in den nicht euklidischen Raum offenbar nicht mehr möglich, deshalb bleiben die Eigenspannungen beständig. Ein solcher Körper unterliegt also dem Zwang, im euklidischen Raum zu bleiben. Dieser Zwang ist um so größer, je größer der Inkompatibilitätstensor η ist. Man kann also diesen Zwang mit dem Inkompatibilitätstensor η identifizieren. Es ist allerdings bis jetzt noch nicht gezeigt worden, wie diese Erkenntnis zur Lösung praktischer Probleme beitragen kann.

5. Innere Spannungen in mehrfach zusammenhängenden Körpern. Versetzungen.

Natürlich kann man auch mehrfach zusammenhängenden Körpern die im letzten Kapitel beschriebenen inneren Spannungen aufzwingen. Darüber hinaus sind bei solchen Körpern weitere Arten von inneren Spannungen möglich, die man bei einfach zusammenhängenden Körpern nicht kennt. Von diesen Spannungen ist eine Gruppe in den letzten Jahren in der Physik von großer Wichtigkeit geworden. Es handelt sich um die durch Versetzungen in Kristallen hervorgerufenen Spannungsfelder. Spannungen dieser Art sind bereits in den Jahren nach 1900 von einer Reihe italienischer Mathematiker [9], [10], [11], insbesondere von VOLTERRA [10], aus ganz anderen Gründen untersucht worden. Wir müssen diese Spannungen hier behandeln, da sich ein wesentlicher neuer Gesichtspunkt ergeben wird. Da aber in den letzten Jahren die Versetzungen von vielen Autoren ausführlich behandelt wurden [12], [13], [14], [15], können wir uns hier kurz fassen.

Abb. 1a zeigt einen spannungsfreien Hohlzylinder im Schnitt. Die Zylinderachse stehe senkrecht zur Zeichenebene. Längs der Flächen A, B ist ein Stück aus dem Zylinder herausgeschnitten. Die Flächen A und B denken wir uns jetzt so zusammengebogen, daß sie vollkommen aneinander zu liegen kommen (Abb. 1b). Dann denken wir uns diese Flächen etwa verschweißt. Wir erhalten so einen kompletten Hohlzylinder mit Spannungen, die augenscheinlich direkt in der Nähe der Trennfläche besonders intensiv sind. In dieser Fläche sind, wie man zeigen kann, die Kompatibilitätsbedingungen nicht erfüllt. Die Verschiebungen machen in der Fläche F (Abb. 1b), längs der sich A und B nach Zusammenbiegen berühren, einen Sprung $a(\tau)$,

der gerade die gegenseitige Lage von A und B vor dem Zusammenbiegen beschreibt. Solch ein Spannungszustand wird also durch F und $a(\tau)$ vollkommen gekennzeichnet¹.

Wesentlich einfachere Spannungszustände ergeben sich, wenn die beiden Flächen von vorn herein so ausgeschnitten werden, daß sie ohne Verformung aneinander passen. In diesem Fall allein sind sogar längs F und damit überall im Körper die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt. Das Kriterium für einen solchen

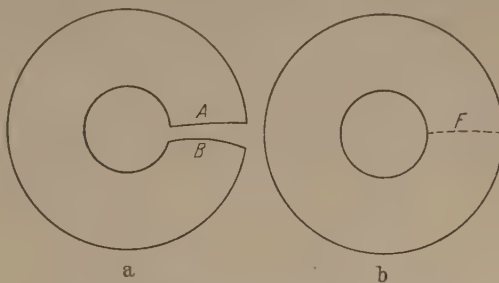


Abb. 1. Zur Erzeugung einer SOMIGLIANA-Versetzung in einem Hohlzylinder.

Spannungszustand, den man nach VOLTERRA benennt, ist, daß die Flächen A und B nur eine starre Bewegung machen dürfen, also Translation oder Drehung. Dabei sind in der Physik bis jetzt hauptsächlich die zu Translationen der Flächen A und B gehörigen Spannungszustände interessant geworden.

Ein Spannungszustand dieser Art wird durch seinen konstanten Translationsvektor b und die zugehörige Fläche F gekennzeichnet. Jedoch ist, wie man zeigen kann, die Fläche F der Form und Lage nach willkürlich. Verlangt wird nur, daß ihr Rand derart

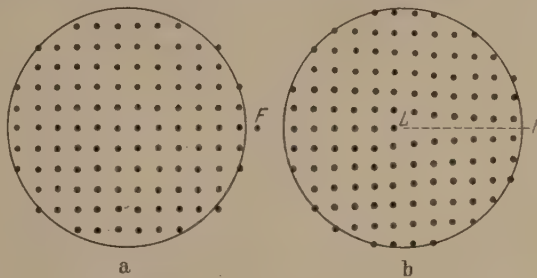


Abb. 2. Zur Erzeugung einer BURGERS-Versetzung in einem Kristall.

auf der Kristalloberfläche liegt, daß ein Schnitt längs F den Zylinder in einen einfach zusammenhängenden Körper verwandelt.

Den Übergang zu den Versetzungen macht man, indem man sich den Zylinder als Kristall vorstellt und den Hohlraum auf eine Linie zusammenschrumpfen läßt. Abb. 2a zeigt einen Kristall mit völlig regelmäßiger Atomverteilung im Schnitt. Aus diesem Kristall denke man sich die halbe Netzebene F herausgenommen und die Nachbarebenen wieder auf Netzebenenabstand genähert. Man erhält dann etwa eine Atomverteilung wie in Abb. 2b. Der Spannungszustand (wenigstens in einiger Entfernung von der Mittelachse) ist wieder durch den Translationsvektor b (hier BURGERS-Vektor genannt) und durch F bestimmt. Der Betrag von b ist hier ein Netzebenenabstand.

¹ Diese Spannungszustände wurden vor allem von SOMIGLIANA [11] und in letzter Zeit von MANN [16] und BOGDANOFF [17] behandelt.

Während man mit Versetzung die gegenseitige Verschiebung der genannten Nachbarnetzebenen bezeichnet, heißt die Mittelachse L Versetzungslinie. Sie ist eine singuläre Linie im Kristall, deshalb nennen wir diesen in Abb. 2b zweifach zusammenhängend.

In realen Kristallen sind die Versetzungslinien im allgemeinen keine Geraden, sondern verlaufen längs irgendwelcher geschlossener oder beiderseits an der Kristalloberfläche endender Raumkurven. Das Spannungsfeld einer solchen Versetzungslinie ist durch den konstanten Verschiebungssprung b mit seiner Fläche F eindeutig bestimmt. Dabei ist F eine der Form nach willkürliche, von L und gegebenenfalls der Kristalloberfläche berandete Fläche.

Nach dieser kurzen Einführung kommt nun der für uns entscheidende Punkt: Genau so gut, wie durch einen Verschiebungssprung b auf einer Fläche F kann man eine Versetzung durch die Größe η der Nichterfüllung der Kompatibilitätsbedingungen längs der F berandenden Linie beschreiben. Dies schließen wir aus der Analogie zur Theorie der Magnetfelder stationärer Ströme: Genau so gut, wie durch einen Sprung des magnetischen Potentials auf einer Fläche F kann man das Magnetfeld eines linearen Stromes durch die Stromstärke in dem F berandenden Leiter L charakterisieren.

Von der Inkompatibilität längs L vermittelt Abb. 2b einen gewissen Eindruck. In Kapitel 6 wird gezeigt, daß die Einführung des Inkompatibilitätstensors η in die Theorie der Versetzungen gewisse Probleme sehr vorteilhaft zu behandeln gestattet. Dort wird auch der formelmäßige Zusammenhang zwischen η und dem BURGERS-Vektor b gegeben.

6. Der Tensor der Spannungsfunktionen bei Eigenspannungszuständen.

Der wesentliche Inhalt der bisherigen Kapitel läßt sich kurz so zusammenfassen: Innere Spannungen werden durch Einflüsse hervorgerufen, die man grundsätzlich durch einen Inkompatibilitätstensor η beschreiben kann. In manchen Fällen gelingt es relativ einfach, den Tensor η als Funktion des Ortes aus den physikalischen Gegebenheiten zu erschließen. In anderen Fällen ist dies eine schwierige, noch nicht gelöste Aufgabe wesentlich physikalischer Natur. Sie wird vielfach auch atomistische Betrachtungen erfordern, wie z.B. bei der plastischen Verformung von Metallen. Die Bestimmung der Inkompatibilität als Ortsfunktion nannten wir den physikalischen Teil des Gesamtproblems der inneren Spannungen. Für ihn läßt sich kein allgemeiner zum Erfolg führender Weg angeben, da die physikalischen Verhältnisse verschiedenster Art sein können.

Anders steht es mit dem zweiten Teil des Gesamtproblems, der Bestimmung der inneren Spannungen, wenn $\eta(\tau)$ als Ortsfunktion bereits vorliegt. Wir nannten ihn den mathematischen Teil. Hier kann ein stets zum Ziel führender Weg angegeben werden. Das spezifische Hilfsmittel zur Berechnung der inneren Spannungen aus den Inkompatibilitäten sind die sog. Spannungsfunktionen.

Der Grund, daß hier die Einführung neuer Funktionen notwendig ist, liegt darin, daß überall dort, wo die Kompatibilitätsbedingungen nicht gelten, eine Verschiebung nicht definiert werden kann. Die ursprüngliche Methode der Elastizitätstheorie war es

aber gerade, aus den Gleichungen (b') bis (d') die Spannungen und Verzerrungen zu eliminieren, wobei sich die bekannten Differentialgleichungen für die Verschiebungen ergaben. Diese mußten für die meisten Zwecke noch entkoppelt werden; man erhielt so Gleichung (e'), welche durchaus der POISSONSchen Differentialgleichung (e'') der Elektrostatik analog ist. In (e') soll $\mathfrak{f}(\mathfrak{F})$ als Abkürzung für den wirklichen Ausdruck in \mathfrak{F} stehen, der uns hier nicht interessiert. Nach dieser Methode erhielt man zuerst die Verschiebungen, dann die Verzerrungen und erst zuletzt die Spannungen, die bei den meisten Problemen allein interessieren.

Man fand diesen Umweg lästig. Die Möglichkeit zu einer direkteren Bestimmung der Spannungen war gegeben, als DE SAINT VENANT erkannte, daß die Gleichungen (d') vollwertig durch seine Kompatibilitätsbedingungen (a') ersetzt werden können. Beschränkt man sich nämlich auf Spannungszustände, die ohne Mitwirkung von Volumenkräften zustande kommen, so kann man die Gleichgewichtsbedingungen durch Einführung von Spannungsfunktionen identisch befriedigen. Die Kompatibilitätsbedingungen ergeben dann für die Spannungsfunktionen gewisse Differentialgleichungen.

Den größten Erfolg hatte im Jahr 1862 AIRY. Er löste das ebene Spannungsproblem mit einer einzigen Spannungsfunktion F , welche der Kompatibilitätsgleichung $\Delta\Delta F = 0$ zu genügen hatte. Diese Funktion ist mit bestem Erfolg immer wieder bei der Berechnung von Spannungsproblemen verwendet worden.

Im Jahre 1870 griff MAXWELL [18] das dreidimensionale Problem an und befriedigte die Gleichgewichtsbedingungen identisch mit drei Spannungsfunktionen, die wir ψ_{xx} , ψ_{yy} , ψ_{zz} nennen wollen, durch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{\partial^2 \psi_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_{zz}}{\partial y^2} \dots\dots \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial^2 \psi_{zz}}{\partial x \partial y} \dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und die durch zyklische Vertauschung von x , y , z folgenden Gleichungen. Für das ebene Problem, also $\partial/\partial z = 0$, folgt hieraus direkt der AIRYSche Ansatz ($F \equiv \psi_{zz}$). Indessen ergaben sich die Funktionen ψ_{xx} , ψ_{yy} , ψ_{zz} nicht biharmonisch, sondern aus der Einführung dieser Funktionen in die Kompatibilitätsgleichungen folgten sechs unübersichtliche gekoppelte Differentialgleichungen 4. Ordnung für die ψ , deren Integration hoffnungslos war. Deshalb sind nie elastische Probleme mit den MAXWELLSchen Funktionen gelöst worden.

Im Jahre 1892 brachte MORERA [19] drei andere Spannungsfunktionen in Vorschlag, die wir heute mit ψ_{xy} , ψ_{yz} , ψ_{zx} bezeichnen würden. Auch hierfür gab es keine einfacheren Differentialgleichungen als bei MAXWELL, so daß auch die MORERAschen Funktionen nie verwendet wurden¹.

Damals schon erkannte BELTRAMI [19], daß man die Gleichgewichtsbedingungen durch einen Ansatz von der Form der Kompatibilitätsbedingungen identisch befriedigen kann, in unserer Sprache also durch einen Ansatz $\sigma = \text{Ink } \psi$. Hier ist ψ ein symmetrischer Tensor. Schreibt man $\sigma = \text{Ink } \psi$ in Komponenten, und setzt man $\psi_{xy} = \psi_{yz} = \psi_{zx} = 0$, so erhält man

¹ Beachte aber: Die bei ebenen Problemen oft verwendete Spannungsfunktion der Torsion [4] ist gleich $\partial\psi_{yz}/\partial x - \partial\psi_{xz}/\partial y$.

genau den MAXWELLSchen Ansatz. Setzt man umgekehrt $\psi_{xx} = \psi_{yy} = \psi_{zz} = 0$, so erhält man den Ansatz von MOREIRA.

Anhand der Tabelle 2 sieht man, daß es sich bei der ELTRAMISchen Befriedigung der Gleichgewichtsbedingungen um einen Ansatz handelt, der zu dem Vektorpotentialansatz $\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}$ in der Theorie der Magnetfelder stationärer Ströme analog ist. Die Differentialgleichungen für die Komponenten von \mathfrak{A} sind gekoppelt und kompliziert, genau wie diejenigen für die Komponenten von ψ . Weil aber \mathfrak{A} wegen $\text{rot grad} \equiv 0$ nur bis auf einen Gradienten bestimmt ist, läßt sich für die Komponenten von \mathfrak{A} eine Nebenbedingung vorschreiben, die man nun gerade so auswählen kann, daß die komplizierten Differentialgleichungen entkoppelt und einfach werden. Mit der Nebenbedingung $\text{div } \mathfrak{A} = 0$ ergibt sich bekanntlich $\Delta \mathfrak{A} \sim j$. Die Frage ist nun, ob für die Komponenten von ψ auch zulässige Nebenbedingungen existieren, durch die sich die komplizierten Gleichungen vereinfachen. Für¹

$$(m+2) \text{Div } \psi = \text{grad } \psi_I \quad (5)$$

erhält man in der Tat

$$\Delta \Delta \psi = 2 G \left(\eta + \frac{1}{m-1} \eta_I I \right).$$

[20]. Bei $\eta = 0$ wird dann ψ biharmonisch. Die Bedingungen (5) sind zulässig, das soll heißen, daß man mit den durch (5) eingeschränkten Spannungsfunktionen ψ noch jeden Spannungszustand, an dem keine Volumenkräfte beteiligt sind, beschreiben kann. Die Zulässigkeit folgt daraus, daß ψ wegen $\text{Ink Def} \equiv 0$ statt auf einen Deformator bestimmt ist [20].

Statt des obigen Spannungsfunktionsansatzes kann man auch den Ansatz

$$\sigma = 2 G \text{Ink} \left(\chi + \frac{1}{m-1} \chi_I I \right) \quad (6)$$

annehmen, der mit den Nebenbedingungen $\text{Div } \chi = 0$ auf

$$\Delta \Delta \chi = \eta \quad (7)$$

führt. Dieser Ansatz ist wegen der kürzeren Form von Gl. (7) manchmal bequemer. Er entspricht einem Vektorpotentialansatz $\mathfrak{B} = \mu \text{rot } \mathfrak{A}$, $\text{div } \mathfrak{A} = 0$. Diese Gleichungen sind in Tabelle 1 unter (i) und (k) eingetragen. Zwischen χ und ψ besteht die Beziehung

$$\psi = \left(\chi + \frac{1}{m-1} \chi_I I \right) 2 G.$$

Gl. (6) schreibt sich mit $\text{Div } \chi = 0$ auch

$$\sigma = 2 G \left[\Delta \chi + \frac{m}{m-1} (\nabla \nabla - \Delta I) \chi_I \right]. \quad (6')$$

Diese Form ist für die praktische Rechnung — auch in krummlinigen Koordinaten — geeignet. (Wegen des Tensors $\nabla \nabla \chi_I$ vgl. die Fußnote von S. 252.)

Da die Gl. (7) mathematisch gut beherrscht wird, ist mit der Einführung der Spannungsfunktionen der allgemeine Weg zur Bestimmung der inneren Spannungen aus der irgendwie ermittelten Größe der Inkompatibilitäten gegeben. Man hat als Partikularlösung von (7)

$$\chi_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \iiint |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \eta(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (8)$$

¹ $\psi_I = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$, entsprechend χ_I, σ_I usw.

Diese Lösung wird im allgemeinen die auf dem Rand des Mediums vorgeschriebenen Bedingungen nicht erfüllen. Man hat dann zu χ_0 einen biharmonischen Deformator zu addieren, welcher gerade für die richtigen Randwerte sorgt, d. h. es ist noch ein Randwertproblem zu lösen, etwa nach Kapitel 7. Für ein unendlich ausgedehntes Medium gibt (8) direkt die richtigen Spannungen, für $\eta = -\alpha \nabla \nabla T(\mathbf{r})$ z. B. die Wärmespannungen infolge der stationären Temperaturverteilung $T(\mathbf{r})$.

Ist η nur auf einer Linie L von Null verschieden ($\bar{\eta}$), so gibt

$$\chi_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int_L |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \bar{\eta}(\mathbf{r}') dL' \quad (9)$$

die zugehörige Partikularlösung. Man erkennt die Analogie zum Gesetz von BIOT und SAVART, das man am einfachsten aus der zu (9) analogen Formel

$$\mathfrak{A} \sim \int_L \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} j(\mathbf{r}') dL'$$

ableitet. Wir interessieren uns hier besonders für das Spannungsfeld einer Versetzungslinie (L, \mathfrak{b}) vom BURGERSvektor \mathfrak{b} , und fragen, was in diesem Fall für η einzusetzen ist. Im Jahre 1939 hat BURGERS [12] das Verschiebungsfeld und damit das Spannungsfeld einer solchen Versetzungslinie mit Hilfe eines Oberflächenintegrals beschrieben. Dieses läßt sich mit dem STOKESSchen Satz in ein Linienintegral transformieren [21]. Man erhält nun genau dieselben Spannungen, wenn man in (9)

$$\bar{\eta} dL = (\vec{dL} \mathfrak{b} \times \nabla + \mathfrak{b} \times \nabla \vec{dL})/2 \quad (10)$$

setzt, wobei die Differentiationen auf \mathbf{r} wirken sollen [22]. Der physikalische Sinn dieser Differentiationen ist folgender: Man hat hier keine gewöhnliche lineare Verteilung von Inkompatibilitäten, sondern eine „Doppelverteilung“ von Inkompatibilitäten längs L . Dies entspricht etwa zwei entgegengesetzt fließenden linearen Strömen, die man sich immer mehr genähert denkt, wobei die Stromstärken gleichzeitig so wachsen sollen, daß das Produkt Stromstärke \times Abstand d der Stromfäden auch für $d \rightarrow 0$ endlich bleibt. In der durch (10) vervollständigten Gl. (9) kann man die meisten Größen vor das Integral ziehen. Man erhält so als das Spannungsfeld, herrührend von einer Versetzungslinie (L, \mathfrak{b}) im unendlich ausgedehnten Medium ($Sy \equiv$ symmetrischer Teil des Tensors)

$$\chi_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} Sy (\mathfrak{b} \times \nabla \mathfrak{L}(\mathbf{r})), \quad \mathfrak{L}(\mathbf{r}) \equiv \int_L |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \vec{dL}'. \quad (11)$$

Dieses Ergebnis zeigt bei einem Vergleich mit den PEACH-KOEHLERSchen Formeln [21] die Überlegenheit der Methode der Spannungsfunktionen bei der so wichtigen Bestimmung des Spannungsfeldes von Versetzungslinien. Man hat hier nur das relativ einfache, rein geometrische Integral $\mathfrak{L}(\mathbf{r})$ zu bestimmen und erhält hieraus durch gewöhnliche Differentiationen das gesuchte Spannungsfeld.

Es ist hiermit gezeigt, daß es Probleme von inneren Spannungen gibt, die sich durch Verwendung des Inkompatibilitätstensors η besonders gut behandeln lassen. Dabei sind die Spannungsfunktionen das geeignetste Hilfsmittel. Man versteht dies leicht aus der

ohne Beweis gegebenen Formel für die Verzerrungsenergie eines unendlich ausgedehnten Mediums mit Eigenspannungen. Diese ist proportional zu $\iiint \chi \cdot \eta \, d\tau$, welche Formel zeigt, daß Spannungsfunktionen und Inkompatibilitäten konjugierte Funktionen sind. Die analoge Formel gibt die magnetische Energie proportional zu $\iiint \mathcal{A} \cdot j \, d\tau$. So wenig wie auf das Vektorpotential in der Theorie der Magnetfelder stationärer Ströme kann man wohl in der Theorie der inneren Spannungen auf die Spannungsfunktionen verzichten¹.

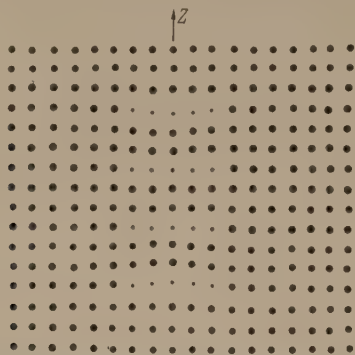


Abb. 3. A1-Gitter (große Punkte) mit plattenförmigen Cu-Ablagerungen (kleine Punkte) in jeder dritten Netzebene. Längsschnitt.

Im Anhang wird eine Spannungsberechnung unter Benützung des Spannungsfunktionsensors praktisch durchgeführt.

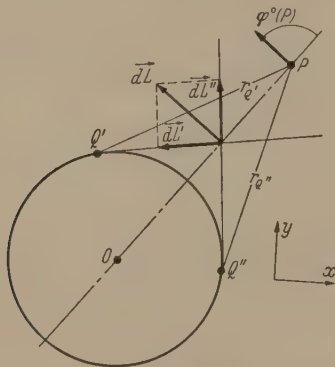


Abb. 4. Der Kreis stellt eine der Versetzungslinien dar. P ein Feldpunkt, der nicht mit dieser Versetzungslinie in einer Ebene zu liegen braucht. Es seien dL', dL'' die Beiträge der zur Geraden OP spiegelsymmetrischen Quellpunkte Q', Q'' zum Integral $\int r dL'$ in P . Wegen $r_{Q'} = r_{Q''}$ ist $|dL'| = |dL''|$. Daher hat $dL = dL' + dL''$ die gleiche Richtung wie φ^0 in P . Zeichnung nur schematisch, nicht maßstäblich.

7. Die Spannungsfunktionen bei räumlichen, durch Randkräfte erzeugten Spannungen.

Obwohl die Spannungsfunktionen ein spezifisches Hilfsmittel zur Ermittlung von inneren Spannungen sind, wurden sie ursprünglich zur Behandlung von äußeren Spannungen eingeführt, da sich aus ihnen die Spannungen direkter als über die Verschiebungen ergeben. Man war dabei im wesentlichen auf ebene Probleme und solche Zustände beschränkt, die durch Randkräfte allein verursacht wurden. Die erste Einschränkung rührte daher, daß sich für die räumlichen MAXWELLSchen und MORERASchen Spannungsfunktionen zu schwierige Differentialgleichungen ergaben.

¹ Dies gilt auch bei Anisotropie. Die Methode der dreidimensionalen Spannungsfunktionen wurde kürzlich in dieser Richtung erweitert [27].

Erst kürzlich ist gezeigt worden [20], daß man bei Spannungen, die allein durch Randkräfte erzeugt werden, den MAXWELLSchen und MORERASchen Spannungsfunktionen noch solche Beschränkungen auferlegen kann, daß sie biharmonisch werden (d. h. also, daß die Kompatibilitätsgleichungen, ausgedrückt in den Spannungsfunktionen sich auf die biharmonischen Gleichungen, für die einzelnen Funktionen vereinfachen). Dies kommt z. B. bei den MAXWELLSchen Funktionen daher, daß man zu der Spannungsfunktion ψ_{zz} nach (4) zwei willkürliche Funktionen $A(y, z)$, $B(z, x)$ addieren kann, ohne an σ_{xy} etwas zu ändern, entsprechendes gilt für ψ_{xx} , ψ_{yy} . Damit auch an σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} nichts geändert wird, ist die Willkür der Funktionen A , B usw. einzuschränken, jedoch nur wenig, so daß die benötigten Nebenbedingungen noch gestellt werden können. Weiter kann gezeigt werden, daß die drei MAXWELLSchen biharmonischen Spannungsfunktionen durch insgesamt drei harmonische Spannungsfunktionen ausgedrückt werden können [20]. Auch für dreidimensionale Probleme lassen sich demnach bei vernünftigem Rechenaufwand Spannungsfunktionen verwenden.

Anhang:

Berechnung von inneren Spannungen bei der Aushärtung von Aluminium-Kupfer-Legierungen.

Zum Schluß soll an einem praktischen Beispiel die Brauchbarkeit des Tensors der Spannungsfunktionen für die Spannungsberechnung gezeigt werden. In einem bestimmten Stadium der Aushärtung von Aluminium-Kupfer-Legierungen sammeln sich die Cu-Atome zu einatomaren Schichten innerhalb des Aluminiums an, so daß etwa jede vierte Netzebene eine Cu-Ebene ist (Abb. 3). Dabei beträgt der Durchmesser einer solchen Cu-Schicht etwa 100 Å. Das Verhältnis der Atomradien von Cu und Al ist etwa 9/10. Da in der Schichtenfolge der kohärente Zusammenhang der Netzebenen gewahrt bleibt, tritt eine Verformung auf. Die zugehörige Verzerrungsenergie soll berechnet werden¹.

Aus früheren Rechnungen ist bekannt, daß im Fall plattenförmiger Cu-Schichten in Al über 90% der Verzerrungsenergie im Al gespeichert ist [23], [24]. Daher ist der Fehler gering, wenn wir vom Cu überhaupt absehen und an Stelle der Cu-Schichten nun die die Schichten berandenden Linien als Versetzungslinien vom gemeinsamen BURGERS-Vektor $b = b^0 z^0$ einführen². Nach Kapitel 5 werden ja Versetzungen gerade durch Einzwängen solcher Schichten erzeugt. Die Versetzungslinien liegen im Al ähnlich, wie die Stromschleifen einer Spule, und wir werden ganz analog wie bei der Berechnung des Magnetfeldes einer stromdurchflossenen Spule vorgehen. Der Einfachheit halber nehmen wir pro Längeneinheit ν kreisförmige Versetzungslinien vom Krümmungsradius ϱ_0 an. ϱ, φ, z seien Zylinderkoordinaten, $\varrho^0, \varphi^0, z^0$ die zugehörigen Einheitsvektoren.

Das Spannungsfunktionsfeld ist durch (11) gegeben³, wo über die Versetzungslinien integriert wird. Das Integral \mathfrak{L} führt auf ein elliptisches Integral. Uns genügt es zunächst, an Hand von Abb. 4 festzustellen, daß $\mathfrak{L}(r)$ die Form $f(\varrho, z)\varphi^0$

hat. Dann wird $\nabla \mathfrak{L} = f_{\varrho} \varrho^0 \varphi^0 + f_z z^0 \varphi^0 - \frac{1}{\varrho} f \varphi^0 \varrho^0$, woraus leicht

$$\chi = \frac{b}{4\pi} (\varrho^0 \varrho^0 f_{\varrho} + \varphi^0 \varphi^0 f_z)$$

folgt. Der Tensor χ in Zylinderkoordinaten hat also nur die Komponenten $\chi_{\varrho\varrho}$ und $\chi_{\varphi\varphi}$, und diese sind unabhängig von φ .

¹ In Wirklichkeit tritt wohl eine gewisse Inkohärenz auf, da hierdurch die Verzerrungsenergie ermäßigt werden kann. Der Untersuchung dieser Frage soll eine besondere Arbeit gewidmet werden.

² Hierauf wurde der Verfasser von Dr. A. SEEGER aufmerksam gemacht.

³ Al verhält sich praktisch isotrop.

ur die Spannungen folgt hieraus mit Hilfe von (6')

$$\left. \begin{aligned} \chi_I &= 2G \left[\Delta \chi_{\varphi\varphi} - \frac{2}{\varrho^2} (\chi_{\varphi\varphi} - \chi_{\varphi\varphi}) \right] + \frac{2Gm}{m-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \Delta \right) \chi_I, \\ \chi_{\varphi\varphi} &= 2G \left[\Delta \chi_{\varphi\varphi} + \frac{2}{\varrho^2} (\chi_{\varphi\varphi} - \chi_{\varphi\varphi}) \right] + \frac{2Gm}{m-1} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \Delta \right) \chi_I, \\ \chi_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{-2G}{m-1} \left(m \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta \right) \chi_I, \\ \chi_{zz} &= \frac{2Gm}{m-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta \right) \chi_I, \\ &= -2G \frac{m+1}{m-1} \Delta \chi_I \\ \chi_{zz} &= \frac{2Gm}{m-1} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial z} \chi_I, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

un ist

$$\begin{aligned} \chi_I &= (1/8\pi) \Delta (b \times \nabla) \cdot f r \vec{dL} = (1/8\pi) \Delta b \cdot f \nabla r \times dL \\ &= (1/4\pi) b \cdot \int \nabla \frac{1}{r} \times dL. \quad (r = |r - r'|). \end{aligned}$$

Vir vergleichen diesen Ausdruck mit demjenigen für das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule $\vec{H} = (i/\gamma) \nabla \frac{1}{r} \times dL$

[25]. Bei hinreichend langer Spule gibt dies bekanntlich in der Spule $\vec{H} \approx 4\pi i/\gamma$ [25] und außen ≈ 0 . Also ist in der selben Näherung $\Delta \chi_I \approx \nu b$ innerhalb der Versetzungslinien, und außerhalb ≈ 0 . In der gleichen Näherung ist $\partial \chi_I / \partial z \approx 0$, da die Integration ganz ähnlich verläuft, wenn unter dem Integral r statt $1/r$ steht. Damit vereinfachen sich die Gln. (12) wesentlich. Innerhalb der Versetzungslinien wird $\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{-2G}{m-1} \nu b$, $\sigma_{zz} = \frac{-2Gm}{m-1} \nu b$, also $\sigma_{zz}/(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}) = m$. D. h. $\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}$ kommt durch die Querkontraktionswirkung zustande, was vernünftig erscheint. Weiter ist $\sigma_{\varphi z} \approx 0$, daher wirken Inneres und Äußeres der Versetzungslinien mit Normalkräften $\sigma_{\varphi\varphi}(\varrho_0)$ aufeinander, die in unserer Näherung constant sind. Die Verhältnisse sind also ähnlich wie beim Aufschumpfen von Rohren, wobei dem inneren Rohr noch eine Zugspannung σ_{zz} zusätzlich auferlegt ist. Aus den bekannten Ergebnissen beim Aufschumpfen [4] schließen wir weiter auf $\sigma_{\varphi\varphi} \approx \sigma_{\varphi\varphi}$ innerhalb und $\sigma_{\varphi\varphi} \approx -\sigma_{\varphi\varphi}$ außerhalb der Versetzungslinien. Letzteres folgt in der Tat aus den Gln. (12), wenn man berücksichtigt, daß $\chi_{\varphi\varphi} = \chi_I - \chi_{\varphi\varphi}$ und ferner in unserer Näherung außen $\Delta \chi_I = 0$, also auch $\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \chi_I = 0$ ist.

Insgesamt ergibt sich in unserer Näherung

$$\begin{aligned} \text{innen: } \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{-G}{m-1} \nu b, \quad \sigma_{zz} = \frac{-2Gm}{m-1} \nu b, \\ \sigma_{\varphi z} &= \sigma_{\varphi z} = \sigma_{\varphi z} = 0, \\ \text{außen: } \sigma_{\varphi\varphi} &= -\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{-G}{m-1} \nu b \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{zz} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0. \end{aligned}$$

Die näherungsweise Berechnung der Verzerrungsenergie ist hiernach nicht mehr schwierig. Man erhält $E = \frac{mG}{m-1} \nu^2 b^2 V$ mit $V = \pi \varrho_0^2 l$, l = Länge der „Spule“². Dabei ist der Fehler

¹ Daß $\sigma_{\varphi z}$ nicht exakt verschwindet, zeigt an, daß die äußeren Cu-Schichten nach innen verbogen werden.

² Hierbei ist nur die Energie zwischen $z = \pm l/2$ und $z = -l/2$ berücksichtigt. Bei langen „Spulen“ genügt das. Zahlenbeispiel: $\varrho_0 = 100 \text{ \AA}$, $l = 500 \text{ \AA}$. Netzebenenabstände: $d_{Al} \approx 2,02 \text{ \AA}$, $d_{Cu} \approx 1,81 \text{ \AA}$. Wenn jede vierte Netzebene aus Cu-Atomen besteht, ist $\nu = 1/4 d_{Al}$. Ferner setzen wir $b \approx d_{Cu} - d_{Al} \approx -0,2 \text{ \AA}$. Damit ergibt sich $E \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ erg}$, oder auf 1 Mol in dieser Weise abgeschiedenes Cu umgerechnet, $e \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ erg/Mol}$, was ein vernünftiger Wert ist.

größenordnungsmäßig der gleiche, wie er gemacht wird, wenn man die magnetische Energie einer Spule mit Hilfe der Stromwindungszahlformel berechnet.

Ohne den Tensor der Spannungsfunktionen hätten wir wohl kaum durch eine so kurze Betrachtung so viele zuverlässige Angaben über den obigen Spannungszustand erhalten.

Zusammenfassung.

Die beiden Hauptabschnitte der Elastizitätstheorie — Theorie der äußeren und Theorie der inneren Spannungen — werden in Analogie zur Elektrostatik bzw. zur Theorie der Magnetfelder stationärer Ströme entwickelt. Innere Spannungen sind stets mit der Nichterfüllung der Kompatibilitätsbedingungen verbunden. Die Größe dieser Nichterfüllung wird durch den Inkompatibilitätstensor η gemessen, welcher die Analogie zur elektrischen Stromdichte vertritt. Der Inkompatibilitätstensor wird für zwei Fälle (Wärmespannungen und Versetzungen) als Funktion des Ortes angegeben. Es wird gezeigt, daß zur Lösung von Problemen innerer Spannungen der räumliche Tensor der Spannungsfunktionen χ besonders geeignet ist. Er vertritt die Analogie zum Vektorpotential der Magnetfeldertheorie. Bei Abwesenheit von Volumenkraften lassen sich die elastischen Differentialgleichungen in der einfachen Form $\Delta \Delta \chi = \eta$ schreiben.

Ich danke Herrn Professor U. DEHLINGER und Herrn Dr. A. SEEGER für zahlreiche fruchtbare Diskussionen. Den Anhang habe ich einer freundlichen Anregung von Herrn Professor GRAMMEL folgend geschrieben.

Literatur. [1] NEMENYI, P.: Z. angew. Math. u. Mech. 11, 59 (1931). — [2] REISSNER, H.: Z. angew. Math. u. Mech. 11, 1 (1931). — [3] LOVE, A. E. H.: Math. Theory of Elast. Cambridge 1926. — [4] BREZENO — GRAMMEL: Technische Dynamik, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1953. — [5] FRANK — v. MISES: I, Braunschweig, Vieweg, 1930, S. 97 ff. — [6] LAGALLY, M.: Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig, Akad. Verlagsges. 1928. — [7] DUHAMEL, J. M. C.: Mém. prés. à l'Acad. de Paris, T. V. 1838, S. 440. — [8] NEUMANN, F.: Abhandl. d. Berl. Akad. 1841. — [9] WEINGARTEN, J.: Acc. Lincei Rend. Roma V, 10, (1901). — [10] VOLTERRA, V.: Ann. de l'Ecole norm. sup. III, 24, 400 (1907). — [11] SOMIGLIANA, C.: Acc. Lincei Rend. Roma V, 23, 463 (1914) und 24, 655 (1915). — [12] BURGERS, J. M.: Proc. Ned. Acad. Wet 42, 378 (1939). — [13] NABARRO, F. R. N.: Adv. in Phys. 1, 269 (1952). — [14] COTTRELL, A. H.: Dislocations and Plast. Flow. in Crystals, Oxford 1953. — [15] READ, W. T.: Dislocations in Crystals, Mc Graw-Hill Publ. Comp. London 1953. — [16] MANN, E. H.: Proc. Roy. Soc. A 199, 376 (1949). — [17] BOGDANOFF, J. L.: J. appl. phys. 21, 1258 (1950). — [18] MAXWELL, J. C.: Edinburgh Roy. Soc. Trans. 26, 1870. — [19] MORERA, G.: Acc. Lincei Rend. Roma V, 1 (1892). Die Beziehungen zwischen den MAXWELLSchen und MORERASchen Spannungsfunktionen werden in diesem Band von MORERA und BELTRAMI erörtert. — [20] KRÖNER, E.: Z. f. Physik, 139, 175 (1954). — [21] PEACH, M. und J. S. KOEHLER, : Phys. Rev. 80, 436 (1950). — [22] KRÖNER, E.: Proc. Phys. Soc. London, A 68, 53, (1955). — [23] NABARRO, F. R. N.: Proc. Roy. Soc. London, A 175, 519 (1940). — [24] KRÖNER, E.: Acta Met. 2, 302 (1954). — [25] HUND, F.: Einführung in die theoret. Physik, Leipzig: Bibl. Institut, 1947, S. 155. — [26] ESHELBY, J. D. Phil. Trans. Roy. Soc. A 244, 87, (1951). — [27] KRÖNER, E.: Z. f. Phys. im Druck.

EKKEHART KRÖNER, Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule und Max-Planck-Institut für Metallforschung Stuttgart.

Berichte.

Elektrolumineszenz.

Von ALBRECHT FISCHER.

Mit 8 Textabbildungen.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954).

Einleitung.

Unter Elektrolumineszenz versteht man im neueren Schrifttum die in Festkörpern ohne Mitwirkung von Wärme stattfindende Umwandlung von elektrischer Energie in Licht. Die Lichterzeugung durch Elektrolumineszenz hat in den Nachkriegsjahren dank intensiver empirischer Entwicklungsarbeiten rasche Fortschritte gemacht. Erste technische Anwendungen

von Halbleiter- und Lumineszenzphysik befruchtend auf diese Gebiete zurück.

Im folgenden soll versucht werden, einen Überblick über den heutigen Stand der Forschung zu geben. Elektrolumineszenz kommt durch zwei verschiedene Ursachen zustande. Wir behandeln den einfachsten Fall zuerst, obwohl er bisher nur wenig praktische Bedeutung erlangt hat.

A. Elektrolumineszenz in p - n -Schichten.

LOSSEV fand 1927 bei der Suche nach Detektor-kristallen, daß manche Siliziumkarbidkristalle bei Stromdurchgang leuchten [1]. Die Deutung dieser Erscheinung, wonach das Leuchten auf Rekombination der Ladungsträger in p - n -Schichten zurückzuführen sein soll, wurde von LEHOVEC, ACCARDO und JAMGOCHIAN unter Benutzung der modernen Ergebnisse der Halbleiterphysik gegeben [2]. Auch in Germanium-Gleichrichtern tritt diese Art der Elektrolumineszenz, allerdings im ultraroten Spektralbereich, auf [3]. Es ist zu erwarten, daß sich noch zahlreiche andere kristalline Substanzen dazu eignen werden.

Eine „ p - n -Schicht“ entsteht dort, wo innerhalb eines halbleitenden Kristalles infolge unterschiedlicher Beimischungen der Leitungstyp von Elektronen- (n) zu Löcher- (p) -Leitung übergeht. Wegen des Konzentrationsgefälles diffundieren Elektronen aus dem n - in den p -leitenden Teil hinüber, während sich die Löcher umgekehrt verhalten. Da jeweils Donator- bzw. Akzeptortermine elektrisch unkompensiert zurückbleiben, entsteht eine Raumladungsdoppelschicht. Zwischen den beiden Teilen des Kristalls bildet sich damit eine Potentialdifferenz aus, welche der Diffusion entgegenwirkt. Im konventionellen Bändermodell des Kristalles, bei dem als Abszisse die Entfernung im Kristall, als Ordinate die Gesamtenergie des Elektrons aufgetragen sind, verschieben sich im Übergangsgebiet die Bänder entsprechend der Diffusionsspannung gegeneinander (Abb. 1a).

Legt man an einen Kristall, der eine p - n -Schicht enthält, eine Spannung derart an, daß der Potentialsprung abgebaut wird (Abb. 1b), so fließen Elektronen und Löcher aufeinander zu und vereinigen sich. Diese Rekombination, welche unter Mitwirkung von Gitterschwingungen und Störstellen verläuft, kann strahlungslos oder strahlend vonstatten gehen; im letzteren, allein erwünschten Fall werden Lichtquanten der Energie $h\nu < \Delta E$ (Breite der verbotenen Zone) emittiert. Die Lichtintensität ist proportional der Konzentration der Elektron-Loch-Paare, also proportional der Stromstärke durch den Kristall.

Das Verhältnis von strahlenden zu strahlungslosen Übergängen wird mit zunehmendem ΔE der Kristalle günstiger. Da bei Germanium mit $\Delta E = 0,7$ eV bereits mehr als 10% der Elektron-Loch-Paare strahlend rekombinieren (Aigrain), sind bei Stoffen, die im sichtbaren Spektralbereich lumineszieren, gute Ausbeuten zu erwarten. Der schlechte Wirkungsgrad von 10^{-6} Quanten pro Elektron beim SiC (2) dürfte lediglich eine Folge der starken Verunreinigungen der unter-

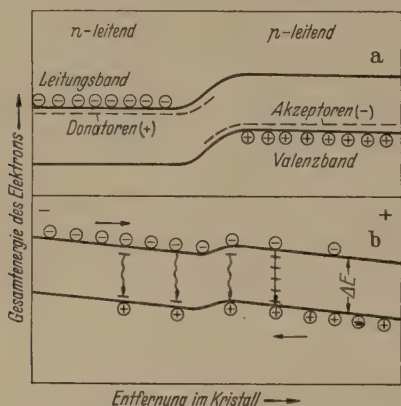


Abb. 1. Bändermodell eines p - n -Überganges (schematisch); a) ohne äußeres Feld, b) bei Belastung in Flußrichtung. Einige Übergangsmöglichkeiten sind angedeutet.

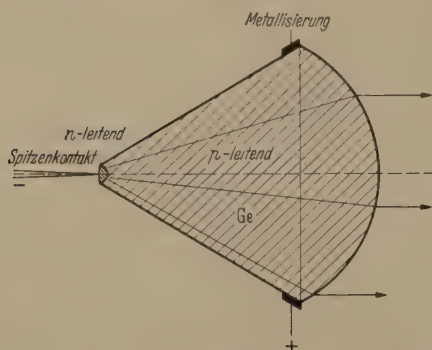


Abb. 2. Schnitt durch einen Elektrolumineszenzstrahler aus Germanium für infrarotes Licht. (Nach AIGRAIN (3)). Der Einkristall wurde in diese Form geschliffen, um Lichtverluste durch Totalreflexion im Inneren ($n_{Ge} = 4$) zu vermeiden.

haben das Interesse weiter Kreise für die an sich schon lange bekannten Erscheinungen erweckt. Auch der Mechanismus der Elektrolumineszenz anorganischer Halbleiterphosphore beginnt allmählich in den Grundzügen verständlich zu werden, wenngleich viele Einzelprobleme noch ihrer Klärung harren.

Bei der Deutung der Erscheinungen sind die Erkenntnisse über Gleichrichter und Transistoren, die Theorien über den elektrischen Durchschlag in Kristallen und vor allem die Physik der Kristallphosphore von großem Nutzen. Umgekehrt wirken die Ergebnisse der Erforschung der Elektrolumineszenzerscheinungen und die dabei auftretenden neuen Fragestellungen wegen der hier besonders innigen Vereini-

chten Proben, welche nur zufällig entstandene Sperrichten enthielten, sein. Eine zur Ausnutzung des n -Leuchtens entwickelte Anordnung zeigt Abb. 2.

Wahrscheinlich geht, zumindest beim SiC, die Rekombination über besondere, von den Halbleiterstörstellen unabhängige Aktivatorzentren vor sich (vgl. [4]).

Es ist jedoch möglich, daß die Donator- und Akzeptorstellen die Rolle von Haftstellen und Aktivatoren übernehmen. Hieraus ergibt sich, vorerst allerdings noch spekulativ, die enge Verwandtschaft zwischen Phosphor- und Halbleiterstörstellen, die bei der p - n -Lumineszenz besonders augenfällig ist (5). Überlappen sich nämlich in einer p - n -Schicht die Akzeptoren und Donatoren dotierten Kristallbereiche, so ist im Übergangsgebiet etwa gleichviel Störstellen jeder Art vorhanden sind („kompensierter Halbleiter“), so können die aus den Donatoren stammenden Elektronen mit den Löchern kombinieren, und es entsteht eine an freien Ladungsträgern arme Zone, die einem Phosphor ähnelt, da die mit Elektronen aufgefüllten Akzeptoren den Aktivatoren, die entleerten Donatoren den Haftstellen eines Phosphores entsprechen.

Die weitere Erforschung dieses Typs der Elektrolumineszenz wird von der Auffindung geeigneter Substanzen, aus denen sich große Einkristalle herstellen lassen, ausgehen müssen. Diese Kristalle müssen amphoteren Leitungscharakter haben, was, wie die Erfahrung zeigt, nur beim Überwiegen des homöopolen Bindungsanteils möglich ist, und durchsichtig sein ($\Delta E > 2,2$ eV). In diesem Zusammenhange gewinnen die Verbindungen der dritten und fünften Periode des periodischen Systems, insbesondere die der ersten drei Zeilen, welche auch für die Halbleiterphysik von Interesse sind, große Bedeutung. BN und AlN sind bereits als gute Phosphore bekannt.

Die üblichen Phosphore scheinen, da sie nur Überchußhalbleitung zeigen, zur Herstellung homogener p - n -Übergänge ungeeignet zu sein.

Wir gehen nunmehr zur Behandlung des zweiten Elektrolumineszenzeffektes über, welcher gegenwärtig von mindestens sechs verschiedenen Forschergruppen untersucht wird.

B. Elektrolumineszenz in elektrischen Wechselfeldern (DESTRIAU-Effekt).

1. Beschreibung der Haupteigenschaften.

DESTRIAU entdeckte 1936 [6], daß manche mikrokristallinen ZnS/Cu-Phosphore durch elektrische Wechselfelder zum Leuchten angeregt werden. Das Leuchtstoffpulver wird in einem durchsichtigen isolierenden, thermoplastischen Dielektrikum suspendiert und in dünner Schicht in einen Plattenkondensator mit durchsichtigen Belägen (dünne durchsichtige Halbleiterschichten auf Glas [7]) gebracht. Diese einfache Anordnung (Abb. 3) zeigt folgende typische Haupteigenschaften:

Legt man eine sinusförmige Wechselspannung an den „Leuchtcondensator“ an, so nimmt das dunkeladaptierte Auge bei den besten, speziell für diese Anregungsart gezüchteten Leuchtstoffen bereits bei Brutto-Feldstärken (Spannung/Plattenabstand) von 3–4000 V/cm ein aus vielen winzigen leuchtenden Flecken zusammengesetztes flächenhaftes Leuchten wahr. Bei Erhöhung der Spannung steigt die Gesamtlichtintensität exponentiell (durch $I \sim U^{4-7}$ approximierbar) an.

Stroboskopische Betrachtung zeigt vier, bei einigen Substanzen auch nur zwei Lichtimpulse pro Periode des Feldes (Abb. 4). Zwischen den Intensitäts- und Feldmaxima beobachtet man eine Phasenverschiebung.

Bei Frequenzerhöhung steigt die Gesamtintensität zunächst etwa linear an. Bei einigen tausend Hertz gehen die einzelnen Lichtimpulse infolge Verschmierung ineinander über und die Gesamtintensität zeigt Sättigung. Bei ZnS/Cu-Zweibandphosphoren verlagert sich die Lichtemission bei Frequenzerhöhung allmählich von der grünen auf die blaue Bande. Das Temperaturverhalten zeigt von Substanz zu Substanz unterschiedlichen Verlauf.

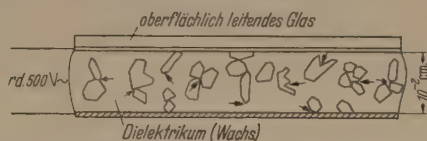


Abb. 3. Schema der Versuchsanordnung beim DESTRIAU-Effekt. Nur die mit Pfeilen gekennzeichneten Stellen der Kristalle leuchten (Kontakte, Verwachsungen, Spitzen). Viele Kristalle bleiben vollkommen dunkel (10,36).

2. Die verschiedenen Deutungsmöglichkeiten.

Ehe wir zur Behandlung der Experimente, die zur Deutung der Erscheinung angestellt worden sind, übergehen, wollen wir verschiedene, zur Auswahl stehende Deutungsmöglichkeiten besprechen.

a) Zunächst liegt es nahe, auch hier an Rekombinationsleuchten in p - n -Schichten zu denken. Die im Dielektrikum eingebetteten Kristallite könnten ein n -leitendes Inneres mit p -leitendem Überzug besitzen, wie es bei Germanium bekanntlich leicht vorkommt.



Abb. 4. Lichtemission in Abhängigkeit von der anregenden Feldstärke. (10^4 V/cm, 200 Hz). Leuchtstoff: ZnS mit 10^{-3} Mol/Mol Cu, 10^{-3} Mol/Mol Pb, 10^{-3} Mol/Mol Zn Cl₂, $\frac{1}{2}$ Std. 900° C in N₂, Waschung in Na-Azetatlösung. Die unterschiedliche Höhe der Hauptimpulse entsteht durch stärkere Absorption des an der Rückseite der Kristalle emittierten Lichts beim Durchgang durch die Schicht.

Diese Annahme ist jedoch zur Erklärung nicht ausreichend. Wenn die Löcher der p -leitenden Randschicht nämlich einmal mit Elektronen aus dem Innern des Kristalles aufgefüllt sind, was nach einer Periode des Wechselfeldes der Fall ist, dann kann keine weitere Elektrolumineszenz entstehen, da bei ZnS wegen des großen Abstandes zwischen Leitfähigkeitsband und Valenzband ($\Delta E > 3$ eV) praktisch keine Neuerzeugung von Löchern durch thermische Paarbildung erfolgt. Man muß schon die unter b) und c) aufgeführten Mechanismen zu Hilfe nehmen.

Jedoch stellt dieses Modell eine mögliche Erklärung für die Entstehung negativ aufgeladener Oberflächenterme mit darauf folgender positiver Verarmungsrandschicht, wie wir es später benötigen werden (vgl. Abb. 8), dar, denn bei der Auffüllung der Löcher der p -leitenden Außenschicht mit Elektronen aus dem Kristallinneren tritt eine derartige Raumladungsdoppelschicht auf.

b) Weiterhin müssen die verschiedenen Möglichkeiten der Einwirkung starker elektrischer Felder auf den Kristall diskutiert werden.

In starken elektrischen Feldern können die Aktivatorzentren direkt in den angeregten Zustand überführt werden¹, ferner können durch wellenmechanischen

¹ Rechnungen unter Zugrundelegung einer wasserstoffähnlichen Beschaffenheit des Zentrums [12,13] ergeben Mindestfeldstärken von 10^6 – 10^7 V/cm.

Tunneleffekt Elektronen aus den Haftstellen und Aktivatorn und auch aus dem Valenzband ins Leitungsband übergehen (Abb. 5), wie das beim ZENER-Effekt in den Theorien des elektrischen Durchschlages eingehend diskutiert wurde [9].

Man muß auch in Betracht ziehen, daß eine dem STARK-Effekt des freien Atoms entsprechende Aufspaltung der Energiebänder und Zwischenterme des

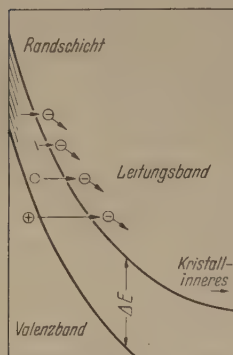


Abb. 5. Feldemission von Elektronen aus Oberflächen- und Randschichthaftstellen, Aktivatortermen und aus dem Valenzband durch wellenmechanischen Tunneleffekt.

reinen ZENER-Effektes benötigen, auswirken.

Eine Vergrößerung dieser Übergangswahrscheinlichkeit wird zweifellos auch durch die Störterme in oberflächennahen Schichten der Kristalle hervorgerufen, welche nach neueren Auffassungen die verbotene Zone quasikontinuierlich überdecken. Die Elektronen aus dem Valenzband brauchen dann nicht die ganze verbotene Zone auf einmal zu durchtunneln, sondern

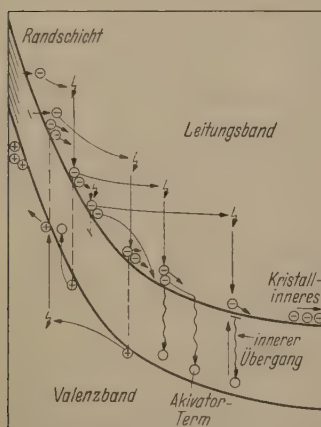


Abb. 6. Mögliche Ereignisse bei der Ausbildung einer Stoßionisationslawine.

⚡ bedeutet unelastischer Stoß.

trons, die nach b) ins Leitungsband gelangen, in starken Feldern so viel Energie gewinnen können, daß sie durch unelastischen Stoß Haftstellen entleeren, Aktivatorzentren anregen und ionisieren oder sogar durch Ionisation des Grundgitters Elektron-Loch-Paare erzeugen könnten [8]. Ähnlich wie in Gasen bildeten sich in den Maxima des Feldes Stoßionisationslawinen im Festkörper aus (Abb. 6) vgl. [39]. Rekombinationsleuchten entstande während der Ausbildung der Lawinen und in den Nulldurchgängen des Feldes, wenn die durch Stoß von den Aktivatorn abgetrennten Elektronen zurückkehren können.

Es wären also vier Lichtimpulse pro Periode des Wechselfeldes zu erwarten.

d) Der Vollständigkeit halber sei auch eine triviale Erklärung für die Entstehung des Leuchtens erwähnt. In Gaseinschlüssen in den Kriställchen oder im einbettenden Dielektrikum können sich Glimmentladungen ausbilden, die durch Wellen- oder Korpuskularstrahlung die Lumineszenz erregen. Dieser Effekt kann jedoch, obwohl er manchmal als schwache Störung nebenher auftritt, nach Meinung zahlreicher Autoren nicht als die eigentliche Ursache des Leuchtens gelten.

Der ZENER-Effekt in b) und der Stoßionisationsmechanismus in c) spielen wegen der bei ihnen auftretenden Vermehrung der Ladungsträger in der Theorie des elektrischen Durchbruchs (9) eine große Rolle. Für beide Effekte werden von der Theorie Einsatzfeldstärken von mehr als 10^6 V/cm gefordert, also Feldstärken, die um mehrere Größenordnungen höher liegen, als die für das Einsetzen der Elektrolumineszenz benötigten Brutto-Feldstärken.

Die an ZnS-Kristallen gewonnenen Versuchsergebnisse legen es, wie wir sehen werden, nahe, dem Stoßanregungs- bzw. Stoßionisationsmechanismus die Hauptbedeutung zuzuschreiben. Dieses bereits von DESTRIAU vermutete Ergebnis ist von verschiedenen Forschern, zuerst wohl auf Grund von Experimenten von PIPER und WILLIAMS, und theoretisch von D. CURIE, gefunden worden [8, 10–14, 20]. Neuerdings haben jedoch WAYMOUTH und BITTER [36] Zweifel zu dieser Erklärung geäußert.

3. Vereinfachte Modellversuche.

Die komplizierten Verhältnisse bei den eingebetteten Leuchtstoffen legen es nahe, vereinfachte Versuchsbedingungen zu schaffen. Bei diesen Versuchen, die zur Klärung viel beigetragen haben, stehen die Kristalle mit den Elektroden in direkter leitender Verbindung.

Der Zusammenhang der Elektrolumineszenzercheinungen mit dem elektrischen Durchbruch in Kristallen wurde von BÖER und KÜMMEL [18] experimentell sichergestellt. In Kadmiumsulfid-Einkristallen trat im Feldstärkegebiet kurz vor dem Durchschlag, in dem ein exponentielles Anwachsen des Stromes beobachtet wird, Elektrolumineszenz auf.

Im Gegensatz zu den fast isolierenden CdS-Kristallen von BÖER und KÜMMEL sind in leitenden Kristallen, in denen das angelegte Feld im Inneren zusammenbricht, die Durchbrüche auf die Randschichten beschränkt. LOSSEV beobachtete wiederum als erster Elektrolumineszenz an einem solchen Metall-Halbleiter-Kontakt, als er auf einen Zinkit-Kristall (ZnO) eine metallische Kathode aufsetzte [19]. Es handelt sich jedoch nur um eine flüchtige, im Nebensatz mitgeteilte Bemerkung. Gründlichere Untersuchungen stammen von PIPER und WILLIAMS [11], welche kupferaktivierte ZnS-Einkristalle bei Stromdurchgang beobachteten. Bei Gleich- und Wechselspannung wurde am jeweils kathodennahen Ende des Kristalls Lumineszenzlicht ausgesandt. Die Intensität wuchs linear mit der Stromstärke an, welche ihrerseits exponentiell mit der Spannung anstieg. Pro Periode des sinusförmigen Wechselfeldes wurden vier Lichtimpulse beobachtet, zwei in den Maxima, zwei in den Nulldurchgängen des Feldes. Das Leuchten wird folgendermaßen gedeutet [11, 12]:

Der Kristall besitzt außer den flachen, bereits bei Raumtemperatur ionisierten Donatortermen, welche die Dunkelheitfähigkeit verursachen, noch zahlreiche, bis zu 0,5 eV tiefe Haftstellen, die mit Elektronen gefüllt sind. Am Metall-Halbleiter-Kontakt bildet sich durch Übertritt von Halbleiterlektronen ins Metall, welches die größere Austrittsarbeit besitzt, eine CHOTTKYSche Verarmungsrandschicht [37] mit Aufwärtskrümmung der Bänder aus (Abb. 7). Beim Anlegen eines äußeren Feldes wird die Kathodenrandschicht, wie beim in Sperrrichtung gepolten Gleichrichter, aufgebaut. Das Feld im Inneren bricht durch Ladungsverschiebung zusammen. Die Feldstärke in der nur 10^{-4} bis 10^{-5} cm dicken Randschicht wird daher sehr hoch und erreicht mehr als 10^6 V/cm. Beim Anwachsen der Feldstärke können durch Tunneleffekt zunächst Elektronen aus den tiefen gefüllten Haftstellen der Randschicht, dann auch aus der Kathode ins Leitungsband gelangen. Im Feld der Randschicht gewinnen sie soviel Energie, daß sie durch Stoßerregung

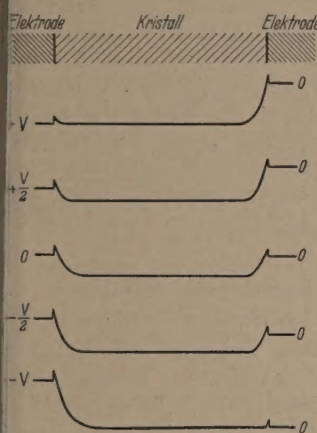


Abb. 7. Potentialverlauf beim Versuch von PIPER und WILLIAMS. (Nach PIPER und WILLIAMS [12]). Die Potentialkurven stellen den unteren Rand des Leitungsbandes dar.

des Grundgitters Elektron-Loch-Paare erzeugen können. Dadurch entsteht im Maximum der Feldstärke ein Lichtimpuls, welcher dem Abklingen der angeregten Zentren oder der sofortigen Wiedervereinigung der Ladungsträger zuzuschreiben ist. Ein weiterer Lichtimpuls entsteht im Nulldurchgang des Feldes, wenn die von den Zentren abgetrennten Elektronen zurückfluten und rekombinieren. In der nächsten, entgegengesetzten Halperiode des Feldes leuchtet

der Kristall auf der anderen Seite, während die in der vorangehenden Halbwelle entleerten Haftstellen durch Leitungselektronen wieder aufgefüllt werden. Eine Stütze der Auffassung von PIPER und WILLIAMS bilden eigene Versuche an Zinkoxyd-Sinterschichten [20], die an Kontakten mit Metallen, Halbleitern und Elektrolyten schon bei wenigen Volt an der kathodennahen Seite mit Gleichrichtwirkung verbundene Elektrolumineszenz zeigen. Auch diese Versuche lassen sich am besten mit der Stoßanregungstheorie in Einklang bringen. Ebenso dürfte das anodische Leuchten der Elektrolytgleichrichter [21] durch Stoßanregung zustande kommen.

Wir erkennen, daß bei diesen Versuchen die bedeutende Erhöhung der Feldstärke in der Verarmungsrandschicht des Kontaktes für die Entstehung des Leuchtens maßgebend ist.

4. Herstellung elektrolumineszierender Leuchtstoffe.

Eine vergleichende Betrachtung der empirisch gefundenen Herstellungsverfahren für elektrolumineszierende mikrokristalline Leuchtstoffe zeigt, daß auch für die isolierend eingebetteten Kristalle Raumladungsrandschichten von ausschlaggebender Bedeutung sind.

Man erkennt nämlich, daß die Elektrolumineszenzfähigkeit durch besondere Oberflächenbehandlungs-

verfahren erzeugt wird. Ihre Wirkung besteht darin, daß auf den Kristallen Haftstellen oder Elektronenreservoirs erzeugt werden, welche aus dem Kristallinneren aufgefüllt werden. Dadurch muß eine Aufbiegung der Bänder entstehen, welche der am Metall-Halbleiterkontakt auftretenden ähnlich ist (Abb. 8).

So elektrolumineszieren manche Leuchtstoffe nur, wenn sie eine Wasserhaut tragen. Bei anderen wird die Intensität des Leuchtens durch eine Wasserhaut erhöht. Viele nur photolumineszierenden Zinksulfid-Leuchtstoffe lassen sich durch kurzes Glühen an Luft, wobei ein oberflächlicher ZnO-Überzug entsteht, elektrolumineszierend machen [22]. Andere Autoren dampfen im Vakuum Kupfer auf das Leuchtstoffpulver auf, wobei einige Stellen der Kristalle metallische Überzüge erhalten [10]. Auch nachträgliche Anreicherung der Oberflächen photolumineszierender ZnS-Leuchtstoffe mit CuS (metallischer Leiter) oder PbS

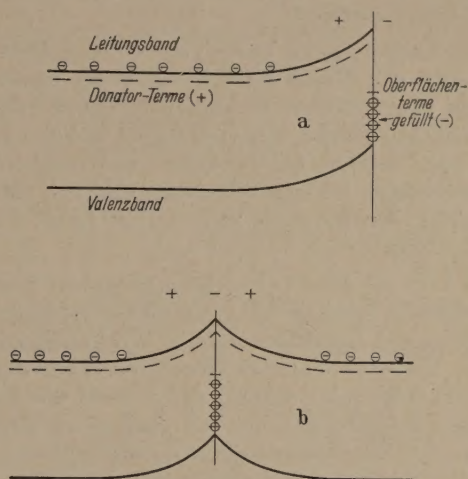


Abb. 8. a) Entstehung einer Verarmungsrandschicht durch Auffüllung von Oberflächentermen mit Elektronen aus dem Kristallinneren. b) Kontakt zweier Halbleiter mit Verarmungsrandschichten. Der erhöhte Kontaktwiderstand ermöglicht die Überhöhung der Feldstärke.

führt zu guten Resultaten [23, 10], ebenso Waschen in CuSO_4 -Lösung¹. Bei den am häufigsten geübten Verfahren endlich setzt man dem ZnS-Grundmaterial vor dem Glühen mehr CuS und PbS zu, als das Wirtsgitter maximal einzubauen vermag, so daß sich der Überschuß außer auf den Kristallen oder in Rissen und Spalten wieder ausscheidet [23, 24, 10]. Um eine Feldabschirmung des Kristallinneren durch die leitfähigen Überzüge zu vermeiden, werden sie in besonderen nachträglichen Waschverfahren mit Essigsäure wieder größtenteils entfernt.

5. Deutung des DESTRIAU-Effektes.

Aus der Vielzahl der zunächst ins Auge gefaßten Möglichkeiten kann man nach Durchsicht der beschriebenen experimentellen Befunde bereits jetzt einige besonders wahrscheinliche Mechanismen herausstellen und damit eine allgemein gehaltene qualitative Deutung des DESTRIAU-Effektes versuchen.

Das Leuchten wird bevorzugt an den Stellen im Kristall einsetzen, wo die höchste Feldstärke herrscht. Deshalb sind die beim Übergang von einer chemischen

¹ Auf Grund der elektrochemischen Redox-Potentiale verdrängen Cu-, Ag- und Au-Ionen in der Oberfläche der ZnS-Kristalle Zn-Ionen von ihren Gitterplätzen und verursachen Akzeptor-Störstellen.

Phase in die andere oder durch Chemisorption (monomolekulare chemisch gebundene Oberflächenschichten [25]) entstehenden Raumladungsdoppelschichten der Sitz der Leuchterscheinungen [15]. In ihnen kann das Feld durch Verschiebung der Leitungselektronen auf die erforderlichen hohen Werte anwachsen. Diese Tatsache kam in den bisherigen Ansätzen zur Berechnung des wirksamen Feldes im Inneren der Kristalle [16, 17] noch nicht zum Ausdruck. Damit diese Feldstärkeüberhöhung besonders günstig ist, muß die Konzentration an freien Elektronen einen optimalen Wert besitzen. Ist sie zu groß, werden die Randschichten zu schmal, das Leuchten ist auf die äußersten Randbezirke beschränkt. Außerdem steigen die Verluste durch JOULESCHE Erwärmung. Ist sie zu klein, werden die Randschichten zu breit, so daß die Durchbruchfeldstärke nicht erreicht wird. Temperaturveränderungen können die Elektronenkonzentration, je nach deren Anfangswert, im günstigen oder im ungünstigen Sinne beeinflussen.

Die Rolle, welche beim Versuch von PIPER und WILLIAMS der Metall-Halbleiterkontakt spielt, wird bei den eingebetteten Kristallen offenbar von Inhomogenitäten zwischen der Oberfläche und den Inneren (Abb. 8a), zufällig entstehenden Sperrschichten an Verwachsungen im Kristallinneren und von zufälligen Kontakten der Kristalle miteinander (Abb. 8b) oder mit den Elektroden übernommen.

Da kein direkter Stromdurchgang von Elektrode zu Elektrode möglich ist, kann eine periodische Wiederholung des Leuchtens nur in Wechselfeldern auftreten. Der exponentielle Anstieg des Leuchtens mit der Feldstärke folgt daraus, daß sowohl die Zahl der befreiten Primärelektronen als auch deren Bruchteil, welcher, falls der Stoßionisationsmechanismus zutreffen sollte, im Leitungsband die erforderliche Energie gewinnen kann, Funktionen des Typs $f(E) \exp(-\text{Const}/E)$ sind [9a, 13]. Auch für den ZENER-Effekt aus dem Valenzband gilt eine Abhängigkeit dieses Typs.

Da die Randschichthaftstellen beim „ausgeruhten“ Phosphor erst durch Leitungselektronen aufgefüllt werden müssen (vgl. B2a), tritt bei den meisten Leuchtstoffen nicht beim erstmaligen Einschalten, sondern erst beim Ausschalten eines Gleichfeldes ein Lichtimpuls auf. Dabei werden nicht alle Elektronen aus den Randschichthaftstellen befreit, so daß durch einseitige Aufladung eine remanente elektrische Polarisation entsteht, die durch Ultraroteinstrahlung beseitigt werden kann [36].

Das bei einigen Stoffen beobachtete Auftreten von vier Lichtimpulsen pro Periode kann, wie schon erwähnt, am besten durch den Stoßionisationsmechanismus erklärt werden. Manche Leuchtstoffe zeigen jedoch nur zwei Lichtimpulse (vgl. [27]). Auch das ist an sich mit dem Stoßanregungsmodell verträglich, denn es ist auch Stoßanregung der Zentren ohne Abtrennung des Leuchtelektrons (vgl. [14]) oder Stoßionisation mit Rekombination nur in den Nulldurchgängen des Feldes möglich. Inwieweit in diesem Falle jedoch auch eine direkte Feldanregung (vgl. B, 2b) mitspielt, kann noch nicht entschieden werden. Wahrscheinlich ist beides möglich.

Der lineare Anstieg der Intensität mit der Frequenz in unteren Frequenzbereich erklärt sich einfach durch die Zunahme der Zahl der Lichtimpulse pro Zeiteinheit.

Die Sättigung bei höheren Frequenzen kommt wohl dadurch zustande, daß sich die einzelnen Lichtimpulse wegen der endlichen Abklingzeit der Zentren überlappen. (Die Haftstellen haben, da sie vom Felde dauernd „leergefegt“ werden, auf die Abklingzeit wenig Einfluß). Die Lichtemission ist dann nur noch schwach durchmoduliert. Dadurch wächst die Elektronenkonzentration im Leitungsband an und die Randschichten, in denen die Anregung und das Leuchten stattfinden, werden schmaler. Zwar werden dann die in ihnen entstehenden Feldstärken größer und ein höherer Bruchteil der Primärelektronen kann die Ionisationsenergie gewinnen, doch tritt wegen der endlichen Dichte der Lumineszenzzentren Sättigung der Lichtemission ein.

Es liegt nahe, den an Zweibandphosphoren bei Frequenzerhöhung beobachteten Farbumschlag zur kurzwelligeren Bande mit dem SCHÖN-KLASSENSCHEN Modell der Zweibandphosphore [26] in Verbindung zu bringen [10]. Bei der soeben beschriebenen Zunahme der Anregungsdichte mit Erhöhung der Frequenz sinkt für die Defektelektronen die Wahrscheinlichkeit, durch thermische Diffusion aus den flachen „blauen“ in die energetisch günstigeren „grünen“ Aktivatorzentren überzugehen, wodurch der Anteil der blauen Bande an der Gesamtemission steigt. Es wurden jedoch auch andere Mechanismen vorgeschlagen [13, 14], z. B., daß die „blauen“ Zentren nur durch Stoß zu inneren Übergängen anregbar sind.

6. Elektrolumineszenz organischer Phosphore.

Neuerdings wurde an adsorbierten Acridinorange und Trypaflavin-Farbstoffen und auch an Carbazol-Pulver bei Einwirkung elektrischer Wechselfelder Elektrolumineszenz gefunden [28]. Falls es sich hierbei um reale Effekte handelt, eröffnen sich der weiteren Untersuchung noch große Möglichkeiten.

7. Elektrophotolumineszenz.

Die bei gemeinsamer Einwirkung von Licht und elektrischen Feldern entstehenden Effekte werden unter dem Oberbegriff Elektrophotolumineszenz zusammengefaßt. Sie können hier nur gestreift werden.

Seit langer Zeit ist die Ausleuchtung der Phosphoreszenz durch elektrische Felder (GUDDEN-POHL-Effekt 1920) [29], die wir als Feld- oder Stoßionisation flacher Haftstellen deuten können, und die bei manchen Leuchtstoffen auftretende Tilgung der Phosphoreszenz (Vermehrung der strahlungslosen Übergänge durch Löcheremission aus Aktivatoren [30, 31] bekannt.

Bei Leuchtstoffen, deren Phosphoreszenz durch Ultrarot ausgeleuchtet wird, wirken elektrische Felder verstärkend, ebenso wird an anderen Stoffen die Ultrarottilgung der Phosphoreszenz durch elektrische Felder beschleunigt [32]. Gleichzeitiger Feldeinwirkung auf UV-erregte ZnS/Mn-Phosphore bewirkt erhebliche Intensitätssteigerung der Lumineszenz [34]. Derartige Lichtverstärker können zur Aufhellung von Fernseh- und Röntgenschirmbildern verwendet werden. Auch gleichzeitige Röntgenbestrahlung bringt interessante Effekte. Die Erklärung aller dieser Erscheinungen ist mit Modellen, die dem zur Deutung des DESTRIAU-Effektes entwickelten bis auf zwanglose Zusatzannahmen gleichen, grundsätzlich möglich.

8. Ausblick.

Beide Arten der Elektrolumineszenz sind noch insofern restlos geklärt und bieten der weiteren Untersuchung große Möglichkeiten. Die hier geschilderten Modellvorstellungen bilden jedoch für die weitere Forschung eine gute Arbeitsgrundlage. Sie gestatten, einen großen Teil der bereits recht umfangreichen empirischen Ergebnisse unter einem gemeinsamen Aspekt zu deuten. Das Leuchten der p - n -Gleichrichter scheint, obwohl seine Zukunft am erfolgversprechendsten zu sein scheint, noch ganz am Anfang seiner Entwicklung. Demgegenüber besteht an der Weiterentwicklung des DESTRIAU-Effektes als technische Lichtquelle, obwohl wegen der Einfachheit der erforderlichen Anordnung, ein großes industrielles Interesse. Nach unseren Modellvorstellungen sind jedoch nur geringe Ausbeuten zu erwarten. Immerhin wurden unter günstigen Bedingungen bereits Lichtausbeuten von mehreren Lumen/Watt, was dem Wirkungsgrad von Glühlampen nahezu gleichkommt, erzielt. Die Leuchtdichte liegt allerdings nur bei 10^{-2} Stilb. Eine leuchtende Fläche von einem Quadratmeter sendet etwa den gleichen Lichtstrom aus wie eine 50 W-Glühlampe. Die neuen Leuchten dürften demgemäß besonders da, wo mildes flächenhaft verteiltes Licht erwünscht ist, günstige Anwendungsmöglichkeiten bieten.

Herrn Prof. HANLE bin ich für viele Anregungen und Verbesserungsvorschläge zu herzlichem Dank verpflichtet.

Literatur. Zur Einführung wird die Lektüre der Artikel von W. STÖCKMANN über Halbleiter, Naturwiss. 37, 85, 105 (1950), und über Kristallphosphore, Naturwiss. 39, 226, 246 (1952), sowie die Arbeit über homöopolare Halbleiter von O. MADELUNG, Ergebn. exakt. Naturwiss. Bd. 27, (1953) empfohlen.

[1] LOSSEV, O. W.: Drahtl. Telegr. (russ.) Nr. 44, 485 (1927); Philos. Mag. 6, 1024 (1928); Physik. Z. 34, 397 (1933). — [2] LEHOVEC, K.: C. A. ACCARDO u. E. JAMGOCHIAN: Phys. Rev. 83, 603 (1951); Phys. Rev. 86, 615 (1952); Phys. Rev. 89, 20 (1953). — [3] HAYNES, J. R. u. H. B. BRIGGS: Phys. Rev. 86, 647 (1952); NEWMANN, R.: Phys. Rev. 91, 1313 (1953);

Aigrain, P.: International Conference on Semiconductors Amsterdam 1954. — [4] SCHÖN, M.: Z. Naturforschg. 8a, 442 (1953). — [5] SCHOTTKY, W.: u. F. STÖCKMANN in: „Halbleiterprobleme I“, Vieweg Braunschweig 1954. — [6] DESTRIAU, G.: J. Chem. Phys. 33, 587 (1936); Philos. Mag. 38, 700, (1947). — [7] AITCHISON, R. E.: Austr. J. Appl. Sci. 5, 10 (1954); FISCHER, A.: Z. Naturforschg. 9a, 508 (1954). — [8] CURIE, D.: J. Phys. Radium 13, 317 (1952). — [9] FRANZ, W.: Ergebn. exakt. Naturwiss. Bd. 27 (1953). — [9a] SEITZ, F.: Phys. Rev. 76, 1376 (1949). — [10] ZALM, P., G. DIEMER u. H. A. KLASSENS: Philips Res. Rep. 9, 81 (1954). — [11] PIPER, W. W. u. F. E. WILLIAMS: Phys. Rev. 87, 151 (1952). — [12] PIPER, W. W. u. F. E. WILLIAMS: Brit. J. Appl. Phys. Supplement No 4 (1954). — [13] CURIE, D.: J. Phys. Radium 14, 510, 672 (1953). — [14] BURNS, L.: J. Electrochem. Soc. Am. 100, 573 (1953). — [15] FISCHER, A.: Physik. Verhandlg. 3, 64 (1954). — [16] DESTRIAU, G.: J. Chim. Phys. 34, 462 (1937). — [17] ROBERTS, S.: J. Opt. Soc. Am. 42, 850 (1952). — [18] BOER, K. W. u. U. KÜMMEL: Z. phys. Chem. 200, 193 (1952); Ann. Physik 14, 341 (1954). — [19] LOSSEV, O. W.: Philos. Mag. 6, 1033 (1928). — [20] FISCHER, A.: Z. Naturforschg. 8a, 756 (1953). — [21] GÜNTHERSCHULZE, A. u. H. BETZ: Z. Physik 74, 681 (1932). — [21a] GÜNTHERSCHULZE, A. u. M. GERLACH: Z. Physik 88, 355 (1934). — [21b] KRIEG, M. u. E. LANGE: Naturwiss. 39, 208 (1952). — [22] GOBBRECHT, H., D. HAHN u. H.-E. GÜMLICH: Z. Physik 136, 612 (1954). — [23] HOMER, H. H., M. RULON u. K. H. BUTLER: J. Electrochem. Soc. Am. 100, 566 (1953). — [24] FROELICH, H. C.: J. Opt. Soc. Amer. 42, 982 (1952); J. Electrochem. Soc. Am. 100, 280, 496 (1953). — [25] ENGELL, H.-J.: in „Halbleiterprobleme I“ p. 249, Vieweg Braunschweig (1954). — [26] SCHÖN, M.: Ann. Physik (6) 3, 333 (1948). — [26a] KLASSENS, H. A.: Nature 158, 306 (1946). — [27] JEROME, C. W. u. W. C. GUNGLE: J. Electrochem. Soc. Am. 100, 34 (1953). — [28] BERNANOSE, A., M. COMTE, P. VOUAUX: J. Chim. Phys. 50, 64, 261 (1953). — [29] GUDDEN, B. u. R. W. POHL: Z. Physik 2, 192 (1920). — [30] SCHMIDT, F.: Ann. Physik 70, 161 (1923). — [31] HINDERER, H.: Ann. Physik 10, 265 (1931). — [32] DESTRIAU, G.: Philos. Mag. 38, 774, 880 (1947). — [33] MATOSI, F.: Phys. Rev. 94, 1151 (1954). — [34] DESTRIAU, G.: J. Appl. Phys. 25, 67 (1954); H.-E. GÜMLICH, Physikertagung Hamburg 1954. — [35] ROBERTS, S.: J. Opt. Soc. Amer. 43, 540 (1953). — [36] WAYMOUTH, J. F. u. F. BITTER: Phys. Rev. 95, 941 (1954). — [37] SCHOTTKY, W.: Z. Physik 118, 539 (1942). — [38] HALSTED, R. L. u. L. E. KOLLER: Phys. Rev. 93, 349 (1954); s. a. [36]. — [39] MCKAY, K. G.: Phys. Rev. 94, 877 (1954).

ALBRECHT FISCHER, Physikalisches Institut
der Justus-Liebig-Hochschule, Gießen.

Buchbesprechungen.

Küchemann, D. und J. Weber: Aerodynamics of propulsion. New York—London: McGraw-Hill 1953, 340 S. m. zahlreichen Abbildungen. Schilling 64/6.

Während der Kolbenmotor auch im Flugzeug seine Entwicklung aus dem Automobilmotor und dem stationären Ottomotor nicht verleugnen kann, ist der moderne Flugzeugantrieb mit Strahltriebwerken eine wesentlich aerodynamische Angelegenheit. Es ist deshalb besonders zu begrüßen, daß die Verfasser aus der Schule PRANDTLs kommend und seit Kriegsende in England tätig, eine sorgfältige und gründliche Darstellung der Aerodynamik des Strahlantriebes geben, zu deren Entwicklung sie durch eigene Arbeiten beigetragen haben.

Nach der ein- und zweidimensionalen Behandlung der Vortriebserzeugung werden die verschiedenen Arten der Ausbildung des Lufteintritts und des Gasaustritts bei Strahltriebwerken behandelt. Ein Kapitel ist dem ummantelten Propeller gewidmet, der heute verstärktem Interesse begegnet. Das Staustrahltriebwerk (ram-jet) und das Turbinenstrahltriebwerk (turbojet) wird ausführlich behandelt. Dann wird auf die gegenseitige aerodynamischen Beeinflussung von Zelle, Flügel und Triebwerk, sowie auf die Ausbreitung des Impulses vom Strahl auf die umgebende Luft eingegangen.

Ein sehr anregendes Kapitel über den Strahlantrieb in der Natur und ein Abschnitt über Kühler schließen das Buch.

Ein Anhang bringt mathematische Ergänzungen mit ausgerechneten Tabellen für eine Anzahl wichtiger Stromfunktionen wie z. B. den Wirbelring, den Quellring und die scheibenförmige Quellverteilung.

Das sehr klar geschriebene und mit ausführlichen Literaturangaben versehene Buch wird für jeden, der sich für Flugzeuge mit Strahlantrieben interessiert, sei es vom Gesichtspunkt der Zelle oder von der Seite des Triebwerkes her, ein unentbehrlicher Ratgeber sein, der ihm warm empfohlen werden kann.

E. SCHMIDT.

Lösch, F.: Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1954. 335 S. Ganzl. DM 49,80.

Mehrstellige Tafeln der transzendenten Funktionen mit kleinen Intervallen sind für die numerische Berechnung physikalischer und technischer Probleme — gerade auch beim Arbeiten mit Rechenmaschinen — unerlässlich. Da seit mehreren Jahren das bekannte Werk von K. HAYASHI vergriffen ist, werden die vorliegenden Tabellen der elementaren transzendenten Funktionen sicher von einem weiten Kreis sehr begrüßt werden. Die Funktionen $\varphi^0(x)$ [Gradmaß], $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{Cin} x$, $\operatorname{Coj} x$, $\operatorname{Zg} x$, $\ln x$, e^x , e^{-x} , $\arcsin x$, $\arctg x$, $\operatorname{Ar} \sin x$ und $\operatorname{Ar} \operatorname{Zg} x$ werden für $0 \leq x \leq 0,1$ im

Abstand $\Delta x = 10^{-4}$ auf 9 Stellen angegeben, während für $0,1 \leq x \leq 3,15$ mit $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$, für $3 \leq x \leq 10$ mit $\Delta x = 10^{-2}$ und für $10 \leq x \leq 20$ mit $\Delta x = 10^{-1}$ diese Funktionen siebenstellig tabelliert sind. Für $x > 1$ treten an Stelle von $\arcsin x$ und $\arctg x$ die Funktionen $\arccos x$ und $\operatorname{arctg} x$. Ebenfalls auf 7 Stellen werden die Werte von $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x , e^{-x} , $\operatorname{erf} x$ und $\operatorname{erfc} x$ für $0 \leq x \leq 100$ mit $\Delta x = 1$ angegeben. Darüber hinaus finden sich noch manch nützliche Tafeln, wie etwa für die Exponentialfunktion, die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen mit dem Argument $\frac{2}{\pi} x$.

Der klare Druck und die vorzügliche Ausstattung des Werkes ermöglichen ein rasches und sicheres Auffinden der Zahlenwerte.
E. FICK

Zimmer, E.: Umsturz im Weltbild der Physik. 10. Aufl. München: Carl Hanser 1954. 300 S. u. 103 Abb. Geb. DM 12,80.

Das schon in erster Auflage (1934) mit einem Geleitwort von MAX PLANCK versehene Buch wendet sich in seiner mit geringen mathematischen Hilfsmitteln verständlichen Darstellung der experimentellen und theoretischen Grundlagen für das physikalische Weltbild vornehmlich an den Nichtphysiker.

In der vorliegenden 10. Auflage, in welche auch die modernste Atomkernforschung und Atomtechnik im Text mit guten Abbildungen aufgenommen und der naturphilosophische Schlußteil wesentlich ergänzt worden ist, tritt noch deutlicher als früher hervor, daß „Umsturz“ in der Physik organisches Wachsen, allerdings häufig sehr impulsives Wachsen des Weltbildes im Sinne einer Verfeinerung der Details bedeutet und daß das alte Weltbild als gröbere Näherung stets erhalten bleibt. Die Art dieses Wachstums wird besonders deutlich gemacht durch zahlreiche sorgfältig ausgewählte, in den Text eingestreute Zitate aus Originalarbeiten hervorragender Physiker.

Allen Wissenschaftlern, denen die Physik Grundlage und Mittel zum Zweck ist und denen, die das physikalische Weltbild als echte Allgemeinbildung betrachten, sei dieses gelungene moderne Buch empfohlen.
A. HINZPETER.

Görlich, P.: Die Anwendung der Photozellen. (Technisch-Physikalische Monographien, Band 7.) Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, KG. 1954. 468 S. u. 281 Abb. Geb. DM 29,—.

Wenn man das Buch „Die Anwendung der Photozellen“ von P. GÖRLICH zur Hand nimmt, so erhält man einen Überblick, wie stark die Photozelle in die verschiedensten Gebiete der wissenschaftlichen Untersuchungs-Methodik und der angewandten Forschung bis zu den technischen Regel- und Kontrolleinrichtungen eingedrungen ist. Dieser von P. GÖRLICH vorgelegte 2. Band über die Photozellen dient als Ergänzungsband seiner 1. Veröffentlichung: „Die lichtelektrischen Zellen. Ihre Herstellung und Eigenschaften.“ Somit bringt der vorliegende Band keine Grundlagen, sondern eine erfreuliche Zusammenstellung der vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Photozellen. Es werden in 7 Abschnitten durchgesprochen: Allgemeine Schaltungen wie Elektrometer-, Galvanometer- und Verstärkerschaltungen verschiedener Art, Schaltungen von Hochspannungsgeräten für Vervielfacher und Lichtzellen, weiterhin grundsätzliche Schaltungen mit Photozellen, bei denen das Ereignis direkt oder indirekt mit Lichtschranke bzw. Schwellwert erfaßt wird, registrierte Vorgänge oder direkte Meßvorgänge mit Photozellen, die Anwendung der Photozelle in der akustischen Wiedergabe für Bildwandler und Fernsehen. Die verschiedenen Verfahren werden meist durch die verwendeten Schaltbilder belegt. Lediglich 42 Abbildungen zeigen fertige Geräte oder Einzelteile. Gerade die reichhaltige Anzahl der Schaltbilder ermöglicht es dem Leser, in die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten und Probleme tiefer einzudringen, wobei der Begleittext eine wesentliche Hilfe darstellt. Besonders bemerkenswert ist das reichhaltige Literaturverzeichnis mit mehr als 800 (bis 1953) Titeln, auch unter Berücksichtigung russischer Literatur. So vermittelt das Buch einen vorzüglichen Überblick über die Anwendungsmöglichkeiten der Photozellen in den verschiedensten Richtungen, und kann bestens empfohlen werden für solche Leser, die sich schnell orientieren wollen über die Möglichkeiten, die Photozelle in dieser oder jener

Richtung einzusetzen, oder aber um einen Hinweis zu erhalten, welche Meß- oder Registriermöglichkeiten mit der Photozelle bereits durchgeführt wurden.
F. ASSELMAYER.

Bartels, H.: Grundlagen der Verstärkertechnik. 4. Aufl. Stuttgart: S. Hirzel Verlag 1954. XII, 278 S. u. 181 Abb. Geb. DM 20,—.

Die neue Auflage des bewährten Buches ist der fortgeschrittenen Technik angepaßt und durch einige Abschnitte ergänzt worden. So wurde unter anderem die Behandlung der Transistors aufgenommen. Ebenso wurde auch das ausführliche Literaturverzeichnis auf den derzeitigen Stand gebracht, ohne daß deshalb wichtige ältere Angaben weggelassen wurden. Da das Buch vor allem für die Praxis gedacht ist, sind sämtliche Bauelemente des Verstärkers gleichberechtigt behandelt worden, wobei vor allem Wert auf die Darstellung der Grundlagen gelegt ist, dem großen Umfang des Stoffes entsprechend. Der Behandlung des Verstärkers, des Leistungsverstärkers, der Mit- und Gegenkopplung sind Abschnitte vorangestellt, die sich mit den Grundbegriffen, Meßmethoden und der Behandlung einfacher Netzgeräte mit vielen quantitativen Berechnungen Grundlagen befassen. Die weitgehende Unterteilung des Stoffes ermöglicht dabei sowohl dem Studierenden wie dem Ingenieur eine gute Übersicht und jeder, der sich mit Verstärkern befaßt, wird das Buch als gute Hilfe benützen.

E. LUTZE.

Salmang, H.: Die Keramik, physikalische und chemische Grundlagen. 3. Auflage. Berlin / Göttingen / Heidelberg: Springer 1953, 335 S. u. 120 Abb. DM 28,50.

Der besondere Wert des in verbesserter dritter Auflage erschienenen Buches liegt in der aufgezeigten Verknüpfung der naturwissenschaftlichen Grundlagenforschung mit der keramischen Verfahrenstechnik. Das Buch, welches auf breiter Basis zu den Problemen der Keramik Stellung nimmt, wird in beachtenswerter Weise seinen Untertitel „Physikalische und chemische Grundlagen“ gerecht. Der bewußte Verzicht auf eine ins Einzelne gehende Erörterung der Technologie der Keramik wirkt sich auf die erschöpfende Behandlung der physikalischen und chemischen Eigenschaften der Rohstoffe, der Fertigprodukte sowie das Verhalten im Brennpiegel günstig aus.

Die Kapitel „Entstehung der Tonarten“ und „Wasser und Ton“ wurden völlig umgearbeitet. Die Ausführungen über hochfeuerfeste und elektrotechnische Keramik berücksichtigen unter Einbeziehung einer großen Zahl technischer wichtiger keramischer Erzeugnisse den Stand des heutigen Wissens. Die beigelegten Tabellen über „Eigenschaften feuerfester Stoffe“ und „Eigenschaftstafel keramische Isolierstoffe für die Elektrotechnik“ zeichnen sich durch umfangreiche Angaben aus.
W. BORCHERT.

Bechert, R. und Ch. Gerthsen: Atomphysik Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1954, Sammlung Göschel, Band III Theorie des Atombaus, 1. Teil. Von K. BECHERT, 3. umgearbeitete Auflage, 15 Abb. 148 S. Preis DM 2,40. Band IV Theorie des Atombaus, 2. Teil. Von K. BECHERT, 3. umgearbeitete Aufl. 14 Abb. 170 S. Preis DM 2,40.

Die 3. Auflage der Atomphysik von BECHERT u. GERTHSEN, von der der 3. und 4. von BECHERT verfaßte Band vorliegen, ist auf 7 Bändchen berechnet. Sie soll offenbar nicht nur weiter führen als die früheren Auflagen, sondern auch ausführlicher gehalten sein. Der 3. Band enthält im wesentlichen große Teile des früheren 2. Bandes, nämlich Unschärferelation, BOHRsche Theorie, Korrespondenzprinzip, Quantenmechanik, die Analogie Optik-Mechanik, Beispiele zur Wellenmechanik, Operatorenrechnung, H-Atom. Auch der 4. Band bringt noch einige Kapitel aus dem früheren 2. Band, geht aber wesentlich über diesen hinaus. Sein Inhalt ist Atome mit 2 Elektronen, Störungstheorie, Stoßvorgänge, Spin, Moleküle, Lichtstreuung, Photoeffekt, DIRACS Theorie des Elektrons.

Der Verfasser hat es wieder ausgezeichnet verstanden, eine elementare, leicht faßliche und trotzdem strenge Darstellung zu geben. Jeder, der die für das Studium der theoretischen Physik unerläßlichen mathematischen Kenntnisse besitzt, dürfte zum Selbststudium des Werkes instande sein. Zu seiner Verbreitung wird auch der niedrige Preis der Göschel-Bändchen wesentlich beitragen. Es ist zu hoffen, daß die übrigen Teile des Werkes recht bald erscheinen können.
G. HETTNER.